

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет
Кафедра физики ускорителей

Д. В. Пестриков

**БЫСТРЫЕ ДИПОЛЬНЫЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ
КОЛЕБАНИЯ СГУСТКОВ В НАКОПИТЕЛЯХ**

Учебное пособие

Новосибирск
2013

ББК В381.1 я73-1
УДК 621.384.6.01
П

Пестриков Д. В. Быстрые дипольные поперечные колебания сгустков в накопителях: Учеб. пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2013. 93 с.

В пособии описываются быстрые дипольные поперечные когерентные колебания сгустков накопленных частиц, темпы изменений амплитуд и фаз которых существенно превышают частоты синхротронных колебаний частиц. Многие свойства быстрых когерентных колебаний пучков в накопителях напоминают неустойчивость прерывания пучка, которая первоначально наблюдалась лишь в линейных ускорителях. В накопителях возможность запоминания наведенных сгустком полей может приводить к дополнительным важным эффектам.

Учебное пособие предназначено для студентов, магистрантов и аспирантов физического факультета НГУ, занимающихся на кафедре физики ускорителей, и для сопровождения курса «Коллективные эффекты в динамике пучков».

Рецензент
акад. РАН, зав. каф. физики ускорителей
ФФ НГУ Н. С. Диканский

Издание подготовлено в рамках реализации *Программы развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Новосибирский государственный университет»* на 2009–2018 годы.

© Новосибирский государственный университет, 2013
© Д. В. Пестриков, 2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	4
Глава 1. Постановка задачи и определения	5
1.1. Неустойчивости из-за связи синхробетатронных мод	6
1.2. Асимптотические уравнения	9
Глава 2. Быстрые однооборотные неустойчивости	14
2.1. Общие уравнения	14
2.2. Зависимости амплитуд от времени	17
2.3. Подавление неустойчивых колебаний	20
2.3.1. Подавление колебаний разбросами частот	20
2.3.2. БНС-затухание	22
Глава 3. Влияние запоминания наведенных полей	27
3.1. Общие соотношения	27
3.2. Модель	30
3.3. Сгусток конечной длины	31
3.4. Зависимости решений от времени	36
Глава 4. Многосгустковые неустойчивости	44
4.1. Когерентные колебания цуга сгустков	45
4.2. Многосгустковые моды	48
4.3. Развитие колебаний во времени	55
4.3.1. Вклады однооборотных и многооборотных наведенных полей	57
4.3.2. Эффект прерывания цуга сгустков	59
Глава 5. Подавление колебаний разбросами частот	63
5.1. Фурье-амплитуды дипольных моментов	64
5.1.1. Решение уравнения (5.8)	65
5.1.2. Дисперсионные уравнения	69
5.2. Влияние разброса частот на зависимости амплитуд от времени	71
5.2.1. Короткая память наведенных полей	74
5.2.2. Длительное запоминание полей	76
5.2.3. Пороги неустойчивостей	78
Глава 6. Заключительные замечания	87
6.1. Запоминание наведенных полей	88
6.2. Затухание Ландау и пороги неустойчивостей	90
ЛИТЕРАТУРА	93

Предисловие

Мы обсудим проблемы, решения которых иллюстрируют применение общих методов теории линейных когерентных колебаний для описания т. н. быстрых дипольных поперечных когерентных колебаний релятивистских сгустков заряженных частиц. В наших вычислениях мы будем предполагать, что сгусток, или сгустки пучка, взаимодействуют с низкодобротными окружающими электродами, которые занимают малый отрезок замкнутой орбиты. Числа частиц в сгустках предполагаются настолько большими, что относительные скорости изменений амплитуд когерентных колебаний существенно превышают частоты малых синхротронных колебаний частиц. Такие неустойчивости когерентных колебаний сгустков называются быстрыми.

Главной особенностью быстрых неустойчивостей когерентных колебаний является значительная многочастотность когерентного сигнала сгустка. По этой причине расчет собственных частот спектра когерентных колебаний и связанных с ним условий устойчивости мод сгустка ([1], или в [2, 3]) перестает быть главной целью вычислений. Для быстрых неустойчивостей когерентных колебаний сгустка в накопителе предсказания относительно роста амплитуд колебаний во времени требуют полного решения задачи о развитии начальных когерентных колебаний сгустка. Похожие неустойчивости когерентных колебаний ранее наблюдались в линейных ускорителях и получили название эффекта прерывания пучка. Позже было обнаружено, что они могут наблюдаться и в современных накопителях заряженных частиц.

Описание современного состояния большинства из этих проблем рассеяно по журнальным статьям и докладам на ускорительных конференциях. Текст пособия существенно расширяет доступную студентам и научным сотрудникам литературу, описывающую особенности быстрых когерентных колебаний сгустков в ускорителях и накопителях заряженных частиц с единых позиций.

Глава 1

Постановка задачи и определения

Характер развития неустойчивостей поперечных когерентных колебаний сгустков в современных накопителях существенно зависит от соотношения темпов изменения амплитуд когерентных колебаний и частоты синхротронных колебаний частиц. Так, если частота синхротронных колебаний велика по сравнению с величинами когерентных сдвигов частоты или по сравнению с инкрементами/декрементами когерентных мод, то спектры когерентных колебаний сгустков хорошо разделены по мультипольности синхротронного движения на бетатронные и синхробетатронные моды. При этом часто спектры таких мод также хорошо разделены по собственным частотам. Поэтому, например, в такой области параметров удастся выделить ведущую неустойчивую моду, а вклады остальных мод в когерентные сигналы рассматривать как малый фон. За исключением резонансных, медленные неустойчивости бетатронных и синхробетатронных мод являются диссипативными. Инкременты медленных неустойчивостей бетатронных и синхробетатронных мод чувствительны к величине и знаку хроматизма бетатронных колебаний частиц.

С увеличением числа частиц в сгустке частоты бетатронных и синхробетатронных мод в спектре колебаний сгустка сближаются, а затем и вовсе сливаются так, что величины когерентных сдвигов частоты связанных мод становятся равными, а сами моды становятся неустойчивыми. Число частиц в сгустке N , начиная с которого связанные синхробетатронные моды сливаются, определяет порог неустойчивости. Без дополнительного демпфирования колебаний нижнее пороговое значение N обычно определяется условием слияния частот бетатронной и одной из первых синхробетатронных мод когерентных колебаний. В таком случае говорят, что параметры сгустка входят в область неустойчивости из-за связи синхробетатронных мод. Эти неустойчивости хотя и обусловлены взаимодействием сгустков с быстрозатухающими наведенными полями, но относятся к неустойчивостям динамического типа. Их инкременты и пороговые значения N определяется реактивной частью наведенных сгустком полей. Они увеличиваются по мере удаления числа частиц в сгустке от порогового значения. В обоих описанных случаях амплитуды неустойчивых когерентных колебаний увеличиваются во времени по экспоненциальному закону.

Увеличение числа связанных синхробетатронных мод с ростом, например, числа частиц в сгустке необязательно обостряет неустойчивость его когерентных колебаний. Многочастотность когерентных колебаний сгустка может приводить к их взаимному погашению и замедлению роста амплитуд когерентного сигнала во времени.

Такое подавление описано, например, в [3], где установлено, что в пределе малых частот синхротронных колебаний частиц развитие однооборотных когерентных колебаний сгустка в накопителе в точности совпадает с ожидаемыми при развитии в сгустке эффекта прерывания пучка.

1.1. Неустойчивости из-за связи синхробетатронных мод

Как и в [1], мы принимаем, что некогерентные колебания частиц сгустка описываются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
 y &= a_y \cos \phi_y, & p_y &= -\omega_0 v_y a_y \sin \phi_y, & \theta &= \omega_0 t + \phi, \\
 \frac{d\phi}{dt} &= \omega_0 \alpha_p \frac{\Delta p}{p_0}, & \Delta p &= p - p_0, & \phi &= a \cos \psi_s, & \frac{d\psi_s}{dt} &= \omega_0 v_s, \\
 \phi_y &= \psi_y + \phi \frac{d\omega_y}{d\omega_0} = \psi_y + \phi \left[v_y + \frac{\xi}{\alpha_p} \right], & \xi &= \frac{dv_y}{d \ln p}, \\
 I &= \frac{p_0 v_y a_y^2}{2R_0}, & \alpha_p &= \frac{1}{\gamma^2} - \alpha.
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь символ y отмечает величины, относящиеся к вертикальным бетатронным колебаниям, $\Pi = 2\pi R_0$ – периметр замкнутой орбиты, индекс 0 отмечает величины, вычисленные для синхронной частицы пучка, $E_0 = \gamma M c^2$ – энергия синхронной частицы, $v_{y,s}$ – соответственно безразмерные частоты бетатронных и синхротронных колебаний частицы, ξ – хроматизм вертикальных бетатронных колебаний, α – коэффициент пространственного уплотнения орбит. Для простоты принято, что приближение сглаженной фокусировки дает достаточно полное описание некогерентных и невозмущенных колебаний частиц. Формулы (1.1) осуществляют каноническое преобразование от декартовых координат частиц в фазовом пространстве (y, p_y) и $(R_0\phi, \Delta p)$ к переменным действие – фаза невозмущенных колебаний (ψ_y, I) и $(\psi_s, I_s \propto a^2/2)$.

В отсутствии на замкнутой орбите шумовых возмущений и сил трения коллективные колебания частиц пучка описываются уравнением Власова. Если H – гамильтониан, описывающий движение частиц, а f – одночастичная функция распределения частиц пучка в фазовом пространстве, то уравнение Власова записывается в виде

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [H, f] = 0, \tag{1.2}$$

где $[H, f]$ – скобка Пуассона функций H и f . Как уже говорилось, мы предположим, что безразмерные частоты бетатронных колебаний частиц не находятся вблизи нелинейных резонансов. Тогда одиночный сгусток без когерентных колебаний описывается функцией распределения, которая не зависит от фазовых переменных:

$$f = \frac{f_0(I)\varrho(a)}{(2\pi)^2}. \tag{1.3}$$

Такая функция распределения нормирована на единицу:

$$\int_0^\infty dI f_0(I) = 1, \quad \int_0^\infty da a \varrho(a) = 1.$$

Когерентные колебания пучка описываются малыми добавками к f , которые зависят от времени t и являются периодическими функциями фазовых переменных. Поэтому пишем

$$f = \frac{f_0(I)\varrho(a)}{(2\pi)^2} + \sum_m f_m(I, a, t) \exp(im_y\psi_y + im_s\psi_s). \quad (1.4)$$

Здесь $m = \{m_y, m_s\}$. Вертикальные дипольные когерентные колебания описываются набором с $m_y = \pm 1$. Мы будем считать такие колебания несвязанными. При быстром изменении наведенных полей на длине сгустка наборы номеров мультипольности синхротронных колебаний, которые могут быть затребованы для решения задачи, могут быть очень широки. Поскольку ниже мы будем сохранять суммирование только по номерам m_s , мы опустим индекс s у номера мультипольности m_s и вместо m_s будем писать m .

Предполагая, что возмущения колебаний частиц наведенными полями приводят к малым изменениям переменных действие I и a на временах, порядка периода обращения частиц в кольце ($2\pi/\omega_0$), мы можем вычислять амплитуды f_m линеаризацией уравнения Власова вблизи $f_0(I)\varrho(a)/(2\pi)^2$ по амплитудам f_m . В этом пособии мы рассматриваем задачи, в которых возмущения когерентных колебаний сгустка наведенными им полями в окружающих электродах описываются в терминах поперечного локализованного, широкополосного импеданса Z^\perp . Тогда после линеаризации уравнения Власова по амплитудам f_m и вычисления этих амплитуд в первом приближении метода усреднения находим, что амплитуды дипольных когерентных колебаний сгустка могут быть записаны в виде

$$f = \frac{f_0(I)\varrho(a)}{(2\pi)^2} + \sqrt{I} \frac{df_0}{dI} \chi \exp(im_y[\psi_y - \omega_0 \mathbf{v}_y t]), \quad m_y = \pm 1. \quad (1.5)$$

Если предполагать исследование задачи о поиске собственных частот когерентных колебаний сгустка, то гармоники фаз невозмущенных синхротронных колебаний функции

$$\chi(a, \psi_s, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \chi_m(a) \exp(im[\psi_s - \omega_s t] - i\Delta\omega_m t) \quad (1.6)$$

находятся решением следующих систем интегральных уравнений (детали получения этих уравнений описаны, например, в [1] или в [2, 3]):

$$(\Delta\omega_m - m\omega_s)\chi_m(a) = \varrho(a) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Omega_m(n + \mathbf{v}_m) J_m(n_1 a) \chi(n), \quad (1.7)$$

где

$$\begin{aligned} \chi(n) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty da a J_m(n_1 a) \chi_m(a) \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} e^{-in_1\phi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \chi(\Delta p, \phi, \omega). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь $\omega_s = \omega_0 \mathbf{v}_s$ – частота синхротронных колебаний частиц, $\mathbf{v}_m = m_y \mathbf{v}_y$,

$$\Omega_m(n + \mathbf{v}_m) = im_y \frac{Ne^2 \omega_0}{4\pi r v_y} Z^\perp(n + \mathbf{v}_m) \quad (1.9)$$

– величина когерентного сдвига частоты несгруппированного, монохроматического пучка с тем же числом частиц, что и в сгустке, и взаимодействующего с теми же окружающими электродами,

$$n_1 = n + \mathbf{v}_m + \zeta, \quad \zeta = \frac{m_y \xi}{\alpha_p},$$

а

$$\begin{aligned} J_m(x) &= (-i)^m \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi} \exp(ix \cos \psi - im\psi) \\ &= (i)^m \int_0^\pi \frac{d\psi}{\pi} \exp(-ix \cos \psi) \cos(m\psi) \end{aligned} \quad (1.10)$$

– функция Бесселя порядка m . По определению, функции $\chi(n)$ представляют собой азимутальные гармоники линейной плотности пучка. Ввиду предполагаемой широкополосности импеданса Z^\perp в уравнениях (1.7) и (1.9) точные значения частоты ω заменены на частоты невозмущенного спектра когерентных колебаний сгустка $\omega_0(n + \mathbf{v}_m)$.

Поскольку нас будут интересовать когерентные колебания, которые развиваются быстрее синхротронных колебаний частиц, в правой части уравнения (1.7) удержаны слагаемые, описывающие связь всех синхробетатронных гармоник функции распределения. Во многих случаях система интегральных уравнений (1.7) поддается лишь численному решению. В этой связи может оказаться полезными вычисление инвариантов этих уравнений. Например, вычисление суммы всех собственных значений приводит к результату:

$$\begin{aligned} \Delta\omega_\Sigma &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\Delta\omega_m - m\omega_s) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Omega_m(n + \mathbf{v}_m) \int_0^\infty da a \varrho(a) \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m^2(n_1 a). \end{aligned}$$

Используя тождества

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m^2(n_1 a) = 1, \quad \int_0^\infty da a \varrho(a) = 1,$$

находим

$$\Delta\omega_\Sigma = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Omega_m(n + \mathbf{v}_m). \quad (1.11)$$

Согласно (1.7) правая часть этого уравнения в точности совпадает с величиной комплексного когерентного сдвига частоты бетатронной моды сгустка нулевой длины. Для локализованных, пассивных систем электродов мнимая часть $\Omega_m(n)$ является

нечетной функцией n . Поэтому среди собственных решений уравнений (1.7) обязательно присутствуют моды, описывающие неустойчивые колебания. Если связь синхротронных мод мала, то неустойчивые моды могут быть обусловлены head-tail эффектом (например, в [1]). С усилением связи синхротронных мод неустойчивости появляются за счет слияний в спектрах когерентных колебаний частот соседних синхротронных гармоник. Увеличение числа связанных мод при переходе в режим быстрых неустойчивостей приводит к появлению в спектре когерентного сигнала значительного числа примерно равнозначных собственных колебаний. По этой причине условия устойчивости отдельных мод в спектре колебаний не всегда соответствуют условиям устойчивости сгустка, или пучка в целом, а необходимость уточнения этих условий заставляет дополнять вычисления мод колебаний полным решением задачи об эволюции в пучке начальных когерентных колебаний. Такие свойства решений задач об устойчивости когерентных колебаний сгустков с сильной связью его синхротронных мод приближают их решения к тем, которые используются при описании эффекта прерывания пучка.

1.2. Асимптотические уравнения

Если когерентные колебания сгустка развиваются существенно быстрее синхротронных колебаний частиц, то можно ожидать, что за время развития неустойчивости продольные положения частиц в сгустке почти не меняются ($|\dot{\phi}| \leq \omega_s a$). Поэтому изменения амплитуд когерентных колебаний сгустка во времени и вдоль сгустка будут напоминать те, что характерны для эффекта прерывания пучка. Необходимую асимптотику уравнения (1.7) можно установить прямыми вычислениями. Определим безразмерную функцию $w(n) = \Omega_m(n)/\omega_s$ и параметр $x = \Delta\omega_m/\omega_s$. Умножая обе части уравнения (1.7) на $J_m(n'_1 a)/(x - m)$, интегрируя их по $da^2/2$ и суммируя полученные формулы по m , получим следующее интегральное уравнение:

$$\chi(n) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} w(n' + \nu_m) \chi(n') \int_0^{\infty} da a \mathcal{Q}(a) K(n, n', a). \quad (1.12)$$

Здесь

$$K = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{J_m([n + \xi_1]a) J_m([n' + \xi_1]a)}{x - m}, \quad \xi_1 = \nu_m + \xi. \quad (1.13)$$

Используя формулу суммирования

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m = \int_{-\infty}^{\infty} dm b(m) + \sum_{k \neq 0} \int_{-\infty}^{\infty} dm b(m) \exp(2\pi i k m), \quad (1.14)$$

пишем

$$K = K_{sp} + K_{mp}. \quad (1.15)$$

В этой формуле слагаемое K_{sp} описывает явления, которые происходят в течение одного периода синхротронных колебаний частицы

$$K_{sp} = \int_{-\infty}^{\infty} dm \frac{J_m([n + \xi_1]a) J_m([n' + \xi_1]a)}{x - m}, \quad \text{Im } x > 0, \quad (1.16)$$

а слагаемое

$$K_{mp} = \sum_{k \neq 0} \int_{-\infty}^{\infty} dm \frac{J_m([n + \zeta_1]a) J_m([n' + \zeta_1]a)}{x - m} \exp(2\pi i k m), \quad \text{Im } x > 0 \quad (1.17)$$

описывает явления, происходящие за счет многих периодов синхротронных колебаний. Поскольку уравнение (1.7) само по себе справедливо в верхней полуплоскости комплексной переменной x , слагаемое K_{mp} вычисляется подстановкой в (1.17) формулы (1.10) и замыканием контура интегрирования в плоскости комплексной переменной m в верхнюю полуплоскость. При этом слагаемые с отрицательными значениями k не дают вклада в K_{mp} , а вклады слагаемых с положительными значениями k определяются выражением

$$\begin{aligned} K_{mp} &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dm \frac{J_m([n + \zeta_1]a) J_m([n' + \zeta_1]a) e^{2\pi i k m}}{x - m} \\ &= 2\pi i J_m([n + \zeta_1]a) J_m([n' + \zeta_1]a) \sum_{k=1}^{\infty} \exp(2\pi i k x) \\ &= 2\pi i J_m([n + \zeta_1]a) J_m([n' + \zeta_1]a) \frac{\exp(2\pi i x)}{1 - \exp(2\pi i x)} \end{aligned}$$

или

$$K_{mp} = \frac{2\pi i J_x^*(a[n + \zeta_1]) J_x(a[n' + \zeta_1])}{1 - \Lambda}, \quad \Lambda = \exp(-2\pi i x). \quad (1.18)$$

Здесь

$$\begin{aligned} J_x(z) &= \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi} \exp(iz \cos \psi - ix\psi), \\ J_x^*(z) &= \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi} \exp(-iz \cos \psi + ix\psi). \end{aligned}$$

Напомним, что определенные таким образом функции совпадают с функциями Бесселя только в тех точках, где x является целым числом. Если же это не так, то, например, интеграл

$$J_x(0) = \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi} \exp(-ix\psi) = \frac{1 - e^{-2\pi i x}}{2\pi i x}, \quad x \neq 0$$

не обращается в нуль в областях, где x отлично от нуля, но не является целым числом.

Аналогичные выражения для K_{sp} записываются в виде

$$\begin{aligned} K_{sp} &= -i \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi} e^{-i[n+\zeta_1]\phi + ix\psi} \int_0^\psi d\psi' e^{i[n'+\zeta_1]\phi' - ix\psi'} \\ &= -i \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi} e^{-i[n+\zeta_1]\phi} \int_0^\psi du e^{i[n'+\zeta_1]\phi'(\psi-u) + i x u}. \end{aligned}$$

В области $\text{Im } x \gg 1$ главный вклад в интеграл по u дает интервал $\Delta u \simeq 1/\text{Im } x \ll 1$. В такой области мы можем использовать разложения $\phi(\psi - u)$ в ряд по степеням u . Удерживая главный член такого разложения, пишем

$$\phi(\psi - u) \simeq \phi(\psi) - \frac{1}{v_s} \frac{d\phi}{d\theta} u = \phi(\psi) - \frac{\alpha_p \Delta p}{v_s p_0} u. \quad (1.19)$$

Поэтому

$$K_{sp} \simeq -i \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{(2\pi)^2} \exp(i[n' - n]\phi) \quad (1.20)$$

$$\times \int_0^\psi du \exp\left(-i \frac{\alpha_p \Delta p}{\mathbf{v}_s p_0} [n' + \mathbf{v}_m + \zeta]u + i x u\right).$$

Ввиду быстрой сходимости интеграла по u мы распространим интегрирование по u до бесконечности. После этого, интегрирование по u приводит к выражению

$$K_{sp} \simeq \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi} \frac{\exp(i[n' - n]\phi)}{x - [n' + \zeta_1] \frac{\alpha_p \Delta p}{\mathbf{v}_s p}}, \quad \text{Im}x \gg 1. \quad (1.21)$$

Подставляя уравнения (1.21) и (1.18) в (1.15), преобразуем уравнение (1.12) в следующее:

$$\chi(n) = \frac{2\pi i}{1 - \Lambda} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} w(n' + \mathbf{v}_m) \chi(n') \quad (1.22)$$

$$\times \int_0^\infty da a \varrho(a) J_x^*([n + \zeta_1]a) J_x([n' + \zeta_1]a)$$

$$+ \omega_s \sum_{n'=-\infty}^{\infty} w(n' + \mathbf{v}_m) \chi(n') \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta p d\phi}{2\pi} \frac{\varrho(\Delta p, \phi) \exp(i[n' - n]\phi)}{\Delta\omega_m - [n' + \zeta_1] \omega_0 \alpha_p \frac{\Delta p}{p}}.$$

Первое слагаемое в правой части этого интегрального уравнения описывает эволюцию когерентных колебаний сгустка за счет процессов, развивающихся на многих периодах синхротронных колебаний частиц. В области параметров, где неустойчивость может рассматриваться как быстрая (например, $\text{Im}x \gg 1$), вклад этого слагаемого в амплитуду $\chi(n)$ экспоненциально мал. Такая малость не должна вводить читателя в заблуждение. Даже в случае полного забывания электродами наведенных сгустком полей это слагаемое формирует собственные моды его когерентных колебаний. Для оценки вклада этих мод в когерентный сигнал сгустка и влияния их на устойчивость колебаний сгустка должны быть предприняты дополнительные вычисления. Заметим, что согласно уравнению (1.22) вклад этого слагаемого в решения $\chi(n)$ и в условия устойчивости поперечных когерентных колебаний зависит от хроматического набега фазы бетатронных колебаний частицы на длине пучка. Тем не менее, в тех случаях, когда существование собственных мод когерентных колебаний сгустков определяется дополнительными механизмами, вклад первого слагаемого в правой части уравнения (1.22) для быстрых процессов пренебрежимо мал. В таком случае с точностью до экспоненциально малых слагаемых уравнение (1.22) записывается в виде

$$\chi(n) = \omega_s \sum_{n'=-\infty}^{\infty} w(n' + \mathbf{v}_m) \chi(n') \quad (1.23)$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta p d\phi}{2\pi} \frac{\varrho(\Delta p, \phi) \exp(i[n' - n]\phi)}{\Delta\omega_m - [n' + \zeta_1] \omega_0 \alpha_p \frac{\Delta p}{p}}.$$

Такое уравнение описывает коллективные эффекты, которые проходят в течение одного периода синхротронных колебаний. В отличие от первого оно не содержит экспоненциальной малости по отношению $|\Delta\omega_m|/\omega_s$. Хроматичность фокусировки накопителя вносит в это слагаемое дополнительный разброс частот бетатронных колебаний.

Структура этого слагаемого аналогична тем, которые появляются при описании когерентных колебаний сгустка в отсутствие на замкнутой орбите ускоряющих или группирующих ВЧ-полей. Сама по себе эта часть интегрального уравнения (1.22) генерирует спектры собственных значений когерентных колебаний пучка лишь в определенных условиях. Так, для сгустка нулевой длины $\varrho(\Delta p, \phi) = 2\pi\delta(\phi)F_0(\Delta p)$ уравнение (1.22) записывается в виде

$$\chi(n) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \Omega_m(n' + \nu_m)\chi(n') \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_0(\Delta p)d\Delta p}{\Delta\omega_m - [n' + \zeta_1]\omega_0\alpha_p \frac{\Delta p}{p}}. \quad (1.24)$$

Умножая обе части этого уравнения на

$$\Omega_m(n + \nu_m) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_0(\Delta p)d\Delta p}{\Delta\omega_m - [n + \zeta_1]\omega_0\alpha_p \frac{\Delta p}{p}}$$

и суммируя результат по n , приходим к дисперсионному уравнению

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Omega_m(n + \nu_m) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_0(\Delta p)d\Delta p}{\Delta\omega_m - [n + \zeta_1]\omega_0\alpha_p \frac{\Delta p}{p}}. \quad (1.25)$$

Для монохроматического сгустка $F_0(\Delta p) = \delta(\Delta p)$ решение этого дисперсионного уравнения приводит к собственным частотам

$$\Delta\omega_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Omega_m(n + \nu_m), \quad (1.26)$$

которые, как и ожидалось, совпадают с $\Delta\omega_\Sigma$ в (1.11).

Для сгустков конечной длины уравнение (1.24) определенно имеет нетривиальные решения при запоминании наведенных сгустком полей на временах, превышающих период прохождения сгустком электродов. Если же это не так, то говорят, например, об однооборотных эффектах. В последнем случае нетривиальные решения (1.24) появляются лишь в сгустках с достаточно большой продольной подвижностью частиц. Если же продольная подвижность частиц в сгустке подавлена, чему соответствует область параметров, в которой выполнены неравенства:

$$|\Delta\omega_m| \gg \left| n\alpha_p \frac{\Delta p}{p} \right| \omega_0 = |n|a\omega_s, \quad |n|a \leq 1,$$

то для однооборотного взаимодействия уравнение (1.24) преобразуется в однородное интегральное уравнение Вольтерра, которое, как известно [4], не имеет собственных решений. Отсутствие в задаче собственных решений означает, что зависимости амплитуд когерентных колебаний от времени должны вычисляться с явным учетом начальных значений гармоник функции распределения f_m . Это, впрочем, справедливо

при нахождении любых решений уравнений Власова. Возможность сведения вычислений условий устойчивости когерентных колебаний лишь к расчету собственных частот и инкрементов неустойчивостей следует считать, скорее, приятным исключением, чем правилом.

Глава 2

Быстрые однооборотные неустойчивости

В этой главе мы обсудим особенности когерентных колебаний отдельного сгустка для случаев, когда наведенные поля полностью затухают за время оборота частиц в машине. Таким образом, мы будем говорить о быстрых однооборотных дипольных поперечных когерентных колебаниях.

Развитие быстрых однооборотных неустойчивостей обладает целым рядом особенностей. Наиболее важной является отсутствие спектра нормальных решений когерентных колебаний. Физически этот факт заранее очевиден. Отсутствие перемешивания частиц в сгустке за время развития неустойчивости приводит к прерыванию обратной связи когерентных колебаний головной и хвостовой частей пучка. По этой причине колебания головных частиц сгустка оказываются никак не связанными с колебаниями хвостовых частиц, что обуславливает отсутствие спектра собственных мод сгустка.

Первоначально быстрые однооборотные неустойчивости поперечных когерентных колебаний были обнаружены и обсуждались в связи с транспортировкой интенсивных пучков в линейных ускорителях (так называемый эффект прерывания пучка). Позже было выяснено, что аналогичные явления могут иметь место и для сгустков в накопителях, а также, что такие явления наблюдаются в современных циклических машинах с интенсивными сгустками.

2.1. Общие уравнения

Если ожидаемые времена развития когерентных колебаний короче периода синхротронных колебаний, уместно в качестве координат частицы в продольном фазовом пространстве взять переменные $(\Delta p, \phi)$. Для простоты мы проведём вычисления для дипольных бетатронных колебаний. Тогда в пренебрежении продольной подвижностью частиц в сгустке и в первом приближении теории возмущений основное интегральное уравнение для амплитуд гармоник f_m записывается в виде (например, в [1])

$$(\omega - \omega_m)f_m = if_m^{(0)} - \rho_0(\phi)\sqrt{I_y}\frac{\partial f_0}{\partial I_y} \int dI'_y d\Delta p' d\phi' K(\phi - \phi')\sqrt{I'_y}f_m. \quad (2.1)$$

Здесь $f_0 = \rho_0(\phi)F_0(I_y, \Delta p)$ – функция распределения сгустка в стационарном состоянии, $f_m^{(0)}$ – начальное значение гармоники $f_m(I_y, \Delta p, \phi, t)$, а

$$K(\phi - \phi') = \int_{-\infty}^{\infty} dn \Omega_{mn}(n + m_y \nu_y) e^{in(\phi - \phi')}. \quad (2.2)$$

В последнем соотношении учтено, что при описании однооборотных эффектов суммирование по номерам азимутальных гармоник n заменяется интегрированием. Мы упростим вычисления, предположив, что наведенные сгустком поля сосредоточены на достаточно малом участке замкнутой орбиты частиц. Например, если азимутальная длина сгустка равна ϕ_b , а поля сосредоточены на участке азимутальной длины θ_0 , то мы будем изучать задачи, в которых выполняется неравенство $\phi_b \gg \theta_0$. Существенные изменения величины $\Omega_{mn}(\omega)$ ожидаются начиная с номеров гармоник $n \sim 1/\theta_0$. Мы будем предполагать, что главный вклад в интеграл по n в формуле (2.2) набирается в областях $|n|\theta_0 \ll 1$, где можно пренебречь зависимостью величины $\Omega_{mn}(\omega)$ от индекса n , считая, что наведенные поля хорошо локализованы на замкнутой орбите. В соответствии с этим ниже мы будем писать $\Omega_m(n + m_y \nu_y)$.

Для $\phi > \phi'$ интеграл по n в (2.2) вычисляется замыканием контура интегрирования в верхнюю полуплоскость комплексной переменной n . Поскольку в этой полуплоскости величина $\Omega_m(n + m_y \nu_y)$ является аналитической функцией, ядро $K(\phi - \phi')$ равно нулю в области $\phi > \phi'$. Поэтому пишем

$$\begin{aligned} (\omega - \omega_m) f_m &= i f_m^{(0)} - \rho_0(\phi) \sqrt{I_y} \frac{\partial F_0}{\partial I_y} \int_0^{\infty} dI'_y \sqrt{I'_y} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p' \\ &\times \int_{\phi}^{\infty} d\phi' K(\phi - \phi') f_m(I'_y, \Delta p', \phi', \omega). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Для упрощения вычислений мы предположим, что наведенные сгустком поля, с одной стороны, полностью затухают за период обращения частиц в машине, а с другой, что их затухание на длине сгустка пренебрежимо мало. Поэтому мы воспользуемся моделью, в которой величина поперечного когерентного сдвига частоты монохроматического несгруппированного пучка определяется формулой

$$\Omega_m(n + m_y \nu_y) = \frac{i \Omega_m}{\pi(n + m_y \nu_y + i0)}. \quad (2.4)$$

В такой модели вычисление интеграла в (2.2) даёт

$$K(\phi) = \Omega_m e^{-im_y \nu_y \phi} \begin{cases} 1, & \phi \leq 0, \\ 0, & \phi > 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Подстановка этого выражения, а также решений в форме

$$f_m = \frac{i f_m^{(0)}}{\omega - \omega_m} - \rho_0(\phi) \chi(\phi) e^{-im_y \nu_y \phi} \frac{\sqrt{I_y} \partial F_0 / \partial I_y}{\omega - \omega_m} \quad (2.6)$$

в уравнение (2.1):

$$\begin{aligned}
(\omega - \omega_m) f_m &= i f_m^{(0)} - \rho_0(\phi) \chi(\phi) e^{-im_y \nu_y \phi} \sqrt{I_y} \frac{\partial F_0}{\partial I_y} \\
&= i f_m^{(0)} - \rho_0(\phi) \sqrt{I_y} \frac{\partial F_0}{\partial I_y} \Omega_m \int_{\phi}^{\infty} d\phi' e^{im_y \nu_y (\phi' - \phi)} \\
&\times \left[\begin{array}{c} \int_0^{\infty} dI'_y \sqrt{I'_y} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p' \frac{i f_m^{(0)}}{\omega - \omega_m} \\ -\rho_0(\phi') \chi(\phi') e^{-im_y \nu_y \phi'} \int_0^{\infty} dI'_y I'_y \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p' \frac{\partial F_0 / \partial I'_y}{\omega - \omega_m} \end{array} \right]
\end{aligned}$$

приводит к следующему уравнению для новой неизвестной функции χ :

$$\chi(\phi) = i \Omega_m \int_{\phi}^{\infty} d_m^{(0)}(\phi') d\phi' + \Lambda_m \int_{\phi}^{\infty} \rho_0(\phi') \chi(\phi'). \quad (2.7)$$

Здесь

$$d_m^{(0)} = e^{im_y \nu_y \phi} \int_0^{\infty} dI_y \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{\sqrt{I_y} f_m^{(0)}}{\omega - \omega_m} \quad (2.8)$$

– Фурье-амплитуда начальной линейной плотности дипольного момента сгустка, а

$$\Lambda_m = -\Omega_m \int_0^{\infty} dI_y \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{I_y \partial F_0 / \partial I_y}{\omega - \omega_m}. \quad (2.9)$$

Уравнение (2.7) представляет собой неоднородное интегральное уравнение Вольтерра. Относительно этих уравнений известно (например, в [4]), что однородные интегральные уравнения Вольтерра не имеют нетривиальных решений. Это означает, что у однородных интегральных уравнений Вольтерра нет ни собственных функций, ни собственных значений. Последнее утверждение устанавливается, например, заменой в однородной части уравнения (2.7) интегралов по ϕ суммами Дарбу, вычислением детерминантов полученных однородных алгебраических уравнений и последующим устремлением интервалов разбиений по ϕ к нулю. Этим доказывается отсутствие спектров собственных частот быстрых поперечных когерентных колебаний сгустков при их возмущении наведенными полями, которые полностью затухают за время одного оборота частиц в машине.

Неоднородное уравнение (2.7) решается преобразованием его в дифференциальное. После дифференцирования обеих частей в (2.7) по ϕ получаем

$$\frac{d\chi}{d\phi} = -i \Omega_m d_m^{(0)} - \Lambda_m \rho_0(\phi) \chi. \quad (2.10)$$

Из (2.7) видно, что решения уравнения (2.10) удовлетворяют граничному условию $\chi(\infty) = 0$. Записывая решение этого уравнения в виде:

$$\chi = A(\phi) \exp \left(\Lambda_m \int_{\phi}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') \right),$$

и используя граничное условие $A(\infty) = 0$, находим

$$A = i \Omega_m \int_{\phi}^{\infty} d\phi' d_m^{(0)}(\phi') \exp \left(-\Lambda_m \int_{\phi'}^{\infty} d\phi'' \rho_0(\phi'') \right),$$

или окончательно

$$\chi(\phi) = i\Omega_m \int_{\phi}^{\infty} d\phi' d_m^{(0)}(\phi') \exp(\Lambda_m N(\phi', \phi)), \quad (2.11)$$

где

$$N(\phi', \phi) = \int_{\phi}^{\phi'} d\phi'' \rho_0(\phi'') \quad (2.12)$$

– число частиц в сгустке между точками ϕ' и ϕ . Вычисление гармоник f_m завершается подстановкой (2.11) в (2.6). Результатом является формула

$$\begin{aligned} f_m(I_y, \Delta p, \phi, \omega) &= \frac{if_m^{(0)}}{\omega - \omega_m} - i\Omega_m \rho_0(\phi) e^{-im_y v_y \phi} \frac{\sqrt{I_y} \partial F_0 / \partial I_y}{\omega - \omega_m} \\ &\times \int_{\phi}^{\infty} d\phi' d_m^{(0)}(\phi') \exp(\Lambda_m N(\phi', \phi)). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Она позволяет вычислить гармоники дипольного момента сгустка

$$d_m(\phi, \omega) = \int_0^{\infty} dI_y \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \sqrt{I_y} f_m(I_y, \Delta p, \phi, \omega). \quad (2.14)$$

Интегрируя обе части (2.13) с $\sqrt{I_y}$, получаем

$$e^{im_y v_y \phi} d_m(\phi, \omega) = id_m^{(0)} + i\Lambda_m \rho_0(\phi) \int_{\phi}^{\infty} d\phi' d_m^{(0)}(\phi') e^{\Lambda_m N(\phi', \phi)}. \quad (2.15)$$

Последняя формула определяет вклад однооборотных эффектов в спектральную плотность дипольного момента сгустка.

2.2. Зависимости амплитуд от времени

Зависимость амплитуд когерентных колебаний от времени получается подстановкой гармоник, определенных в (2.13), в формулу обратного преобразования Фурье

$$f_m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} f_m(I_y, \Delta p, \phi, \omega), \quad (2.16)$$

в которой интегрирование по ω проводится вдоль контура в верхней полуплоскости комплексной переменной ω , проходящем выше всех особенностей подынтегрального выражения. Объединяя это выражение с формулой (2.14), получим уравнение, определяющее зависимость когерентного сигнала сгустка от времени:

$$\begin{aligned} d_m(\phi, t) &= d_m^{(0)}(\phi, t) + \rho_0(\phi) \int_0^{\infty} dI_y \sqrt{I_y} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \\ &\times \int_{\phi}^{\infty} d\phi' e^{im_y v_y [\phi' - \phi]} R_m(\phi, \phi', t) f_m^{(0)}(I_y, \Delta p, \phi'), \end{aligned} \quad (2.17)$$

где

$$\begin{aligned} d_m^{(0)}(\phi, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{-2\pi i} \int_0^{\infty} dI_y \sqrt{I_y} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{f_m^{(0)}(I_y, \Delta p, \phi)}{\omega - \omega_m} \\ &= \int_0^{\infty} dI_y \sqrt{I_y} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p f_m^{(0)}(I_y, \Delta p, \phi) e^{-i\omega_m(I_y, \Delta p, \phi)t}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

а

$$R_m(\phi, \phi', t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{-2\pi i} \frac{\Lambda_m(\omega)}{\omega - \omega_m} e^{-i\omega t + \Lambda_m(\omega)N(\phi', \phi)}. \quad (2.19)$$

Анализ полученных решений существенно упрощается в том случае, когда в задаче можно пренебречь разбросами частот бетатронных колебаний в сгустке. При этом

$$d_m^{(0)}(\phi, \omega) = \frac{D_m^{(0)} e^{im_y v_y \phi}}{\omega - \omega_m}, \quad D_m^{(0)} = \int dI_y d\Delta p \sqrt{I_y} f_m^{(0)}, \quad (2.20)$$

$\Lambda_m = \Omega_m/(\omega - \omega_m)$, а частоты ω_m не зависят от интегралов движения I_y и Δp . Тогда, например, для Фурье-амплитуды дипольного момента получаем:

$$d_m(\phi, t) e^{i\omega_m t} = D_m^{(0)}(\phi) + \rho_0(\phi) \int_{\phi}^{\infty} d\phi' D_m^{(0)}(\phi') e^{im_y v_y [\phi' - \phi]} R_m(\phi, \phi', t), \quad (2.21)$$

где

$$R_m(\phi, \phi', t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{-2\pi i} e^{-i\omega t} R_m(\phi, \phi', \omega), \quad (2.22)$$

а

$$R_m(\phi, \phi', \omega) = \frac{\Omega_m}{\omega^2} \exp\left(\frac{\Omega_m}{\omega} N(\phi', \phi)\right). \quad (2.23)$$

Входящая в эти соотношения функция $R_m(\phi, \phi', \omega)$ называется резольвентой интегрального уравнения (2.7). Как известно, для задач, допускающих нахождение спектра собственных значений, особенностями резольвенты, как функции комплексной переменной ω , являются либо простые полюсы, либо полюсы конечной кратности. В отличие от этого, единственной особой точкой функции $R_m(\omega)$, определенной в формуле (2.23), является существенно особая точка при $\omega = 0$. Это обстоятельство еще раз указывает на отсутствие спектра собственных частот в обсуждаемой задаче. Определённые заключения о характере развития колебаний даёт разложение функции $R_m(\omega)$ в ряд Тэйлора

$$R_m(\phi, \phi', \omega) = \frac{\Omega_m}{\omega^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\Omega_m N(\phi', \phi))^k}{k!} \frac{1}{\omega^k}. \quad (2.24)$$

В этом уравнении первое слагаемое ($k = 0$) описывает резонансную раскачку частиц, находящихся в точке ϕ , частицами, находящимися в точке ϕ' , так, как если бы между ними не было промежуточных частиц. Следующее слагаемое описывает раскачку частиц в точке ϕ частицами, расположенными в промежуточной точке $\phi < \phi'' < \phi'$, колебания которых возбуждены резонансной раскачкой частицами в точке ϕ' . Это приводит к повышению порядка полюса на единицу. Учет вкладов большего числа частиц на интервале от точки ϕ до точки ϕ' и взаимного влияния их колебаний на колебания последующих частиц приводит к дополнительным увеличениям порядка полюса в правой части формулы (2.24). Таким образом, выражение (2.24) описывает резонансную раскачку колебаний частиц в точке ϕ с учетом коллективной реакции промежуточных частиц.

Интеграл по ω в правой части формулы (2.22) вычисляется подстановкой разложения (2.24) в (2.22)

$$R_m(\phi, \phi', t) = \Omega_m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\Omega_m N(\phi', \phi))^k}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{-2\pi i} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^{(k+2)}}. \quad (2.25)$$

Используя соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{-2\pi i} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^{(k+2)}} = \frac{1}{(k+1)!} \left. \frac{d^{(k+1)} \exp(-i\omega t)}{d\omega^{(k+1)}} \right|_{\omega=0} = \frac{(-it)^{(k+1)}}{(k+1)!},$$

перепишем формулу (2.25) в виде

$$R_m(\phi, \phi', t) = -i\Omega_m t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\Omega_m t N(\phi', \phi))^k}{k!(k+1)!}. \quad (2.26)$$

Как и следовало ожидать, для начальных моментов времени ($|\Omega_m|t \ll 1$) это выражение описывает линейный рост амплитуды колебания, что характерно для раскачки линейных бетатронных колебаний частицы гармонической силой в точном резонансе. Для выяснения обратной асимптотики ($|\Omega_m|t \gg 1$) воспользуемся соотношением

$$J_1(z) = \frac{z}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^k}{k!(k+1)!},$$

где $J_1(z)$ – функция Бесселя первого порядка. Тогда формула (2.26) записывается в виде

$$R_m(\phi, \phi', t) = -i\Omega_m t \frac{J_1(2\sqrt{i\Omega_m t N(\phi', \phi)})}{\sqrt{i\Omega_m t N(\phi', \phi)}}. \quad (2.27)$$

Учитывая, что при больших значениях величины $\text{Im}z$ функция $J_1(z)$ растет пропорционально $\exp(\text{Im}z)$, с точностью до предэкспоненциального множителя, пишем

$$R_m(\phi, \phi', t) \propto \exp \left\{ \sqrt{\frac{\Omega_m t}{2} N(\phi', \phi)} \right\}, \quad \Omega_m t \gg 1. \quad (2.28)$$

Как видно из этого выражения, в отличие от задачи о развитии в сгустке медленных синхробетатронных мод, времена нарастания быстрых однооборотных неустойчивостей определяются действительной частью Ω_m . Кроме того, они зависят от расстояния до головной части сгустка. Такое поведение колебаний отражает то обстоятельство, что неустойчивость обусловлена резонансной раскачкой колебаний частиц сгустка предшествующими и отсутствием обратной связи когерентных колебаний его головной и хвостовой частей.

Пропорциональность ядра $R_m(\phi, \phi', t)$ на больших временах фактору $\exp(\sqrt{t/\tau_m})$, где τ_m – время нарастания колебаний, определяется тем обстоятельством, что, согласно (2.5), наведенные поля появляются на орбите скачком после прохождения частицей электродов. При более плавном нарастании полей с ростом $\phi' - \phi$ степень отношения t/τ_m в экспоненте меняется. Например, если сгусток взаимодействует с резонатором, то после прохождения его частицей и для близких значений ϕ и ϕ' наведенные поля изменяются пропорционально разности $\phi' - \phi$. При этом фактор $\exp(\sqrt{t/\tau_m})$ заменяется на $\exp\left((t/\tau_m)^{1/3}\right)$.

2.3. Подавление неустойчивых колебаний

Развитие описанной неустойчивости может ограничиваться трением (охлаждением пучка), разбросом частот бетатронных колебаний частиц, а также специальным разведением частот бетатронных колебаний частиц по длине сгустка ($\omega_y(\phi)$). Последний механизм был предложен для подавления таких неустойчивостей в линейных ускорителях (В. Е. Балакин, А. В. Новохатский, В. П. Смирнов, 1993) и по фамилиям авторов получил название БНС-подавление (в англоязычной литературе – BNS-damping).

2.3.1. Подавление колебаний разбросами частот

Следует отметить, что поскольку в задачах о быстрых однооборотных неустойчивостях отсутствуют собственные моды когерентных колебаний, разбросы частот не приводят к затуханию Ландау колебаний. В случае быстрых однооборотных неустойчивостей когерентные колебания затухают за счет процессов их расфазировки. В интенсивных сгустках взаимодействие частиц вдоль пучка кумулятивно изменяет характер расфазировки различных частей сгустка и тем изменяет зависимости амплитуд когерентных колебаний от времени. Хотя детальный расчет зависимостей амплитуд $d_m(\phi, t)$ от времени требует объемных вычислений и определенного задания функции распределения стационарного состояния в сгустке, асимптотические зависимости $d_m(\phi, t)$ на больших временах t могут быть найдены в общем виде.

Для этого заметим, что первое слагаемое в формуле (2.17) заведомо затухает за счет кинематической расфазировки частиц. Поэтому фактически нам следует установить в формуле (2.17) характер изменения функции $R_m(\phi, \phi', t)$. Согласно формулам (2.19) и (2.9) она определяется выражениями

$$R_m(\phi, \phi', t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{-2\pi i} \frac{\Lambda_m(\omega)}{\omega - \omega_m} e^{-i\omega t + \Lambda_m(\omega)N(\phi', \phi)} \quad (2.29)$$

и

$$\Lambda_m(\omega) = -\Omega_m \int_0^{\infty} dI_y \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{I_y \partial F_0 / \partial I_y}{\omega - \omega_m}. \quad (2.30)$$

На больших значениях t величина интеграла по ω в (2.29) может быть оценена методом стационарной фазы. Для этого заметим, что в такой области параметров подынтегральное выражение в (2.29) содержит фактор

$$\Psi(\omega) = -i\omega t - N(\phi', \phi)\Omega_m \int_0^{\infty} dI_y \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{I_y \partial F_0 / \partial I_y}{\omega - \omega_m}. \quad (2.31)$$

Его величина велика для всех значений ω , исключая окрестность стационарной точки $\omega = \omega_{st}$, положение которой определяется соотношением

$$\frac{d\Psi(\omega_{st})}{d\omega_{st}} = 0, \quad (2.32)$$

или

$$1 = \frac{iN(\phi', \phi)\Omega_m}{t} \frac{d}{d\omega_{st}} \int_0^{\infty} dI_y \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{I_y \partial F_0 / \partial I_y}{\omega_{st} - \omega_m}. \quad (2.33)$$

Пользуясь формальной аналогией этого уравнения и дисперсионных уравнений теории линейных когерентных колебаний (например, в [1]), мы можем вычислять величины ω_{st} так же, как вычислялись корни соответствующих дисперсионных уравнений. В частности, из уравнения (2.33) видно, что в асимптотической области $t \rightarrow \infty$ величина, которая в этой задаче эквивалентна квадрату когерентного сдвига частоты монохроматического пучка

$$\Omega_{eff}^2 = \frac{iN(\phi', \phi)\Omega_m}{t}, \quad (2.34)$$

стремится к нулю. Поэтому для достаточно больших значений t параметр $|\Omega_{eff}|$ становится существенно меньше величины разброса частот колебаний частиц в сгустке ($\delta\omega_m$). В этом случае все корни уравнения (2.33) оказываются в нижней полуплоскости комплексной переменной ω_{st} , а численное значение их мнимой части, с точностью до (большого) множителя и с обратным знаком, равно разбросу частот бетатронных колебаний частиц в сгустке $\delta\omega_m$:

$$\omega_{st} = \omega_m(0) - iL_m(N)\delta\omega_m, \quad L_m \gg 1. \quad (2.35)$$

Здесь $\omega_m(0)$ – значение частоты бетатронных колебаний частиц, например при нулевых значениях I_y и Δp . Напомним, что фактор L_m медленно зависит от числа частиц в сгустке N . Так, для сгустка с гауссовым распределением импульсов частиц и/или с экспоненциальным распределением по I_y , множитель L_m зависит от N логарифмически.

Вычисление интеграла в (2.29) в окрестности точки стационарной фазы ω_{st} , приводит к выражению, которое с точностью до предэкспоненциального множителя записывается в виде

$$R_m(\phi, \phi', t) \propto \exp(-i\omega_m(0)t - L_m(N)\delta\omega_m t). \quad (2.36)$$

Таким образом, действие разброса частот бетатронных колебаний частиц приводит к экспоненциальному подавлению однооборотного когерентного сигнала сгустка до его нулевых значений.

В заключение этого раздела рассмотрим еще один простой пример, в котором затухание когерентных колебаний обусловлено разбросом частот, или трением. Для простоты мы предположим, что разброс частот бетатронных колебаний обусловлен разбросом импульсов в пучке и хроматизмом фокусировки машины. Для упрощения вычислений предположим, что распределение импульсов в пучке описывается функцией Лоренца:

$$F_0(I_y, \Delta p) \propto \frac{\Delta}{\pi(\Delta p^2 + \Delta^2)}.$$

Тогда, например, формула (2.9) записывается в виде

$$\begin{aligned} \Lambda_m &= -\Omega_m \int dI_y d\Delta p \frac{I_y \partial F_0 / \partial I_y}{\omega - \omega_m} \\ &= \Omega_m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta}{\pi(\Delta p^2 + \Delta^2)} \frac{d\Delta p}{\omega - \omega_m - \zeta \Delta p} = \frac{\Omega_m}{(\omega - \omega_m + i\delta_m)}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

а в аналогичных ей формулах множители $1/(\omega - \omega_m)$ заменяются на $1/(\omega - \omega_m + i\delta_m)$.
Здесь

$$\xi = m_y \frac{d\omega_y}{d\Delta p}, \quad \delta_m = |\xi|\Delta.$$

Учитывая это обстоятельство, легко убедиться в том, что, например, первое уравнение в (2.21) переписывается в виде

$$d_m(\phi, t)e^{i\omega_m t + \delta_m t} = D_m^{(0)}(\phi) + \rho_0(\phi) \int_{\phi}^{\infty} d\phi' D_m^{(0)}(\phi') R_m(\phi, \phi', t). \quad (2.38)$$

Характер поведения этих решений на малых временах ($|\Omega_m|t \ll 1$) совпадает с уже обсуждавшимися. На больших временах ($\delta_m t \gg 1$), поскольку R_m растёт не быстрее $\exp(\sqrt{t/\tau_m})$, величины $d_m(\phi, t)$ экспоненциально затухают. Это означает, что, даже если $|\Omega_m| > \delta_m$, с течением времени разброс частот абсолютно подавляет развитие неустойчивости. При этом требование отсутствия потерь пучка лишь устанавливает нижний предел на апертуру вакуумной камеры.

Аналогичное действие на развитие быстрых однооборотных неустойчивостей оказывает охлаждение сгустка. Разница заключается лишь в том, что если, например, λ_y – декремент затухания вертикальных бетатронных колебаний за счет охлаждения, то при выполнении условия $\lambda_y \gg \delta_m$ величина δ_m в (2.38) должна быть заменена на $|m_y|\lambda_y$.

2.3.2. БНС-затухание

Описание БНС-подавления быстрых когерентных колебаний, вообще, требует большего количества вычислений. Для упрощения расчетов мы предположим, что разведение частот бетатронных колебаний частиц вдоль сгустка осуществляется по линейному закону $\omega_y(\phi) = \omega_y + \kappa\phi$, а величина ω_y не зависит ни от импульса, ни от амплитуд бетатронных колебаний частицы. Кроме того, мы рассмотрим специальный случай, когда линейная плотность пучка задаётся ступенчатой функцией:

$$\rho_0(\phi) = \frac{1}{\phi_b} \begin{cases} 1, & 0 \leq \phi \leq \phi_b, \\ 0, & \phi < 0, \phi > \phi_b. \end{cases} \quad (2.39)$$

Определив в (2.20), (2.15) и в (2.14) функции

$$D_m^{(0)}(\phi)e^{im_y\kappa\phi} = \rho_0(\phi)C_m(\phi), \quad d_m(\phi, \omega) = \rho_0(\phi)D_m(\phi, \omega), \quad (2.40)$$

пишем

$$D_m(\phi, \omega) = \frac{iC_m(\phi)}{\Delta\omega_m - m_y\kappa\phi} + \frac{\Omega_m}{\Delta\omega_m - m_y\kappa\phi} \times \int_{\phi}^{\infty} d\phi' \frac{iC_m(\phi')\rho_0(\phi')}{\Delta\omega_m - m_y\kappa\phi'} \exp\left(\Omega_m \int_{\phi}^{\phi'} \frac{d\phi''\rho_0(\phi'')}{\Delta\omega_m - m_y\kappa\phi''}\right), \quad (2.41)$$

а вместо (2.21)

$$D_m(\phi, t)e^{im_y\omega_y(\phi)t} = C_m(\phi) + \frac{\Omega_m}{\phi_b} \int_{\phi}^{\phi_b} d\phi' C_m(\phi') R_m(\phi' - \phi, t). \quad (2.42)$$

Здесь

$$R_m(\phi' - \phi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{-2\pi i} \frac{1}{\omega(\omega - m_y \kappa u)} \quad (2.43)$$

$$\times \exp\left(-i\omega t + \frac{\Omega_m}{\phi_b} \int_0^u \frac{dz}{\omega - m_y \kappa z}\right),$$

а $u = \phi' - \phi > 0$. После интегрирования по z :

$$\frac{\Omega_m}{\phi_b} \int_0^u \frac{dz}{\omega - m_y \kappa z} = \alpha_m \ln \frac{\omega - m_y \kappa u}{\omega},$$

где

$$\alpha_m = -\frac{\Omega_m}{m_y \kappa \phi_b}, \quad (2.44)$$

пишем

$$R_m = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{-2\pi i} \frac{(\omega - m_y \kappa u)^{\alpha_m - 1}}{\omega^{\alpha_m + 1}} e^{-i\omega t}$$

$$= -\frac{1}{\alpha_m} \frac{d}{dr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{-2\pi i} \frac{(\omega - r)^{\alpha_m}}{\omega^{\alpha_m + 1}} e^{-i\omega t}, \quad r = m_y \kappa u,$$

или, полагая, например, $r > 0$,

$$R_m = \frac{it}{\alpha_m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{-2\pi i} \frac{(\omega - 1)^{\alpha_m}}{\omega^{\alpha_m}} e^{-i\omega t}. \quad (2.45)$$

Интеграл по ω вычисляется с помощью соотношения

$$\frac{(\omega - 1)^{\alpha_m}}{\omega^{\alpha_m}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha_m)} \int_0^{\infty} d\xi \xi^{\alpha_m - 1} \exp\left(-\frac{\omega}{\omega - 1} \xi\right). \quad (2.46)$$

Простые вычисления:

$$R_m = \frac{it}{\alpha_m \Gamma(\alpha_m)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{-2\pi i} e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} d\xi \xi^{\alpha_m - 1} \exp\left(-\frac{\omega}{\omega - 1} \xi\right)$$

$$= \frac{ite^{-irt}}{\alpha_m \Gamma(\alpha_m)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{-2\pi i} e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} d\xi \xi^{\alpha_m - 1} \exp\left(-\frac{\omega + 1}{\omega} \xi\right)$$

$$= \frac{ite^{-irt}}{\alpha_m \Gamma(\alpha_m)} \int_0^{\infty} d\xi \xi^{\alpha_m - 1} e^{-\xi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\xi)^k}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{-2\pi i} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^k}$$

приводят к формуле

$$R_m = \frac{-ite^{-irt}}{\alpha_m \Gamma(\alpha_m)} \int_0^{\infty} d\xi \xi^{\alpha_m} e^{-\xi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\xi)^k}{(k+1)!} \frac{(-irt)^k}{k!} \quad (2.47)$$

$$= -\frac{ite^{-irt}}{\alpha_m \Gamma(\alpha_m)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha_m + k + 1)}{(k+1)!} \frac{(irt)^k}{k!}.$$

В последнем соотношении ряд

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha_m + k + 1)}{(k + 1)!} \frac{(irt)^k}{k!} \\ &= \alpha_m \Gamma(\alpha_m) \left(1 + \frac{\alpha_m + 1}{2} \frac{(irt)}{1!} + \frac{(\alpha_m + 1)(\alpha_m + 2)}{2(2 + 1)} \frac{(irt)^2}{2!} + \dots \right) \\ &= \alpha_m \Gamma(\alpha_m) \Phi(\alpha_m + 1, 2, irt) \end{aligned}$$

выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию $\Phi(a, b, z)$. Поэтому

$$R_m = \frac{-ite^{-irt}S}{\alpha_m \Gamma(\alpha_m)} = -ite^{-irt} \Phi(\alpha_m + 1, 2, irt). \quad (2.48)$$

Учитывая соотношение

$$\Phi(\alpha_m + 1, 2, irt) = e^{irt} \Phi(2 - 1 - \alpha_m, 2, -irt),$$

мы можем также записать

$$R_m(\phi' - \phi, t) = -it \Phi(1 - \alpha_m, 2, -irt), \quad r = m_y \kappa(\phi' - \phi). \quad (2.49)$$

Поскольку

$$\frac{d\Phi(a, c, z)}{dz} = \frac{a}{c} \Phi(a + 1, c + 1, z),$$

уравнение (2.42) переписывается в виде

$$\begin{aligned} D_m(\phi, t) e^{im_y \omega_y(\phi)t} &= C_m(\phi) \\ &+ \frac{-i\Omega_m t}{\phi_b i \alpha_m m_y \kappa t} \int_{\phi}^{\phi_b} d\phi' C_m(\phi') \frac{d\Phi(-\alpha_m, 1, -im_y \kappa(\phi' - \phi)t)}{d\phi'} \\ &= C_m(\phi) + \int_{\phi}^{\phi_b} d\phi' C_m(\phi') \frac{d\Phi(-\alpha_m, 1, -im_y \kappa(\phi' - \phi)t)}{d\phi'}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} D_m(\phi, t) e^{im_y \omega_y(\phi)t} &= C_m(\phi) + C_m(\phi_b) \Phi(-\alpha_m, 1, -im_y \kappa(\phi_b - \phi)t) \\ &- C_m(0) - \int_{\phi}^{\phi_b} d\phi' \Phi(-\alpha_m, 1, -im_y \kappa(\phi' - \phi)t) \frac{dC_m(\phi')}{d\phi'}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Формулы (2.42) и (2.50) показывают, что в рамках изученной модели характер развития дипольного момента сгустка зависит от распределения его начального значения вдоль сгустка. Так, если начальное распределение $C_m(\phi)$ представляет собой короткий, одиночный импульс

$$C_m(\phi) = C \delta(\phi - \phi_1), \quad \phi \leq \phi_1 \leq \phi_b,$$

то

$$\begin{aligned} D_m(\phi, t) e^{im_y \omega_y(\phi)t} &= C \delta(\phi - \phi_1) + C \frac{\Omega_m}{\phi_b} R_m(\phi_1 - \phi, t) \\ &= C \delta(\phi - \phi_1) - C \frac{i\Omega_m t}{\phi_b} \Phi(1 - \alpha_m, 2, -im_y \kappa(\phi_1 - \phi)t). \end{aligned}$$

Учитывая формулу

$$\Phi(a, c, x) \simeq \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} e^{-i\pi a} x^{-a} + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^x x^{a-c}, \quad |x| \gg 1, \quad (2.51)$$

получаем, что, для продольных координат $\phi < \phi_1$ и в пределе

$$|m_y \kappa| (\phi_1 - \phi) t \gg 1,$$

зависимость дипольного момента сгустка $D_m(\phi, t) e^{im_y \omega_y(\phi)t}$ от времени описывается формулой ($u = \phi_1 - \phi$, $\omega_u = m_y \kappa u$):

$$\begin{aligned} D_m(\phi, t) e^{im_y \omega_y(\phi)t} &= C \frac{i\Omega_m t e^{i\pi\alpha_m} (-i\omega_u t)^{\alpha_m-1}}{\phi_b \Gamma(1+\alpha_m)} \\ &\quad - C \frac{i\Omega_m t e^{-i\omega_u t} (-i\omega_u t)^{-\alpha_m-1}}{\phi_b \Gamma(1-\alpha_m)} \\ &= C \frac{\Omega_m}{m_y \kappa u \phi_b} \left(\frac{e^{i\pi\alpha_m} (-i\omega_u t)^{\alpha_m}}{\Gamma(1+\alpha_m)} - \frac{e^{-i\omega_u t} (-i\omega_u t)^{-\alpha_m}}{\Gamma(1-\alpha_m)} \right). \end{aligned} \quad (2.52)$$

При любом знаке параметра α_m это выражение описывает колебания, амплитуда которых нарастает во времени по степенному закону. Такой рост замедляется в области $|\alpha_m| \ll 1$.

В другом предельном случае мы можем положить, что начальное значение дипольного момента сгустка $C_m(\phi)$ вообще не меняется вдоль сгустка ($C_m(\phi) = C$). Тогда формула (2.50) переписывается в виде

$$D_m(\phi, t) e^{im_y \omega_y(\phi)t} = C \Phi(-\alpha_m, 1, -i\omega_u t), \quad \omega_u = m_y \kappa (\phi_b - \phi),$$

что на асимптотически больших временах дает:

$$D_m(\phi, t) e^{im_y \omega_y(\phi)t} = C \left(\frac{e^{i\pi\alpha_m} (-i\omega_u t)^{\alpha_m}}{\Gamma(1+\alpha_m)} + \frac{e^{-i\omega_u t} (-i\omega_u t)^{-1-\alpha_m}}{\Gamma(-\alpha_m)} \right). \quad (2.53)$$

Такое выражение описывает затухающие когерентные колебания при выполнении условий

$$\alpha_m < 0, \quad -1 - \alpha_m < 0, \quad -\alpha_m < 1$$

или, учитывая определение (2.44),

$$0 \leq \frac{\Omega_m}{m_y \Delta \omega_y} \leq 1, \quad \Delta \omega_y = \kappa \phi_b. \quad (2.54)$$

При нарушении критерия (2.54) колебания в пучке нарастают по степенному закону.

Технические особенности обеспечения в накопителе требуемой зависимости частот бетатронных колебаний от положений частиц в сгустке могут быть различны. В некоторых случаях такая зависимость может определяться особенностями формирования самих наведенных полей. Так, для неустойчивости пучка электронов из-за накопления на замкнутой орбите положительно заряженных ионов атомов остаточного газа увеличение сдвига частоты бетатронных колебаний электронов вдоль орбиты обусловлено добавлением на заданном азимуте орбиты новых порций ионов после

прохождения очередного сгустка пучка. Сама же неустойчивость обусловлена взаимодействием когерентных колебаний ионов и сгустков электронов. В этом примере БНС-подавление быстрых когерентных колебаний ионов обеспечивается естественным приростом сдвига частоты колебаний электронов.

Глава 3

Влияние запоминания наведенных полей

В этой главе мы изучим влияние запоминания наведенных полей на быстрые поперечные колебания одиночного сгустка частиц, движущегося в накопителе. Для упрощения вычислений мы предположим, что сгусток взаимодействует с электродами, наведенные поля в которых описываются локализованным, широкополосным импедансом специального вида. Мы также будем предполагать, что продольная подвижность частиц в сгустке достаточно сильно подавлена. Для простоты мы ограничимся изучением дипольных поперечных колебаний. Бетатронные колебания частиц будут описываться в приближении сглаженной фокусировки.

3.1. Общие соотношения

Поскольку нас будут интересовать процессы, происходящие на временах существенно короче периодов синхротронных колебаний частиц, в наших расчетах мы будем игнорировать синхротронные колебания, описывая сгусток в приближении квазинепрерывного пучка. Это означает, что некогерентные колебания частиц будут описываться формулами

$$y = \sqrt{\frac{R_0 I}{p v_y}} \cos \psi, \quad p_y = -\sqrt{\frac{p v_y I}{R_0}} \sin \psi, \quad (3.1)$$
$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_y, \quad \theta = \omega_0 t + \phi, \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{\omega_0 \alpha_p}{p} \Delta p.$$

В этой главе мы предполагаем, что фокусирующие поля накопителя не содержат октупольных компонент. Поэтому, если потребуется, то разбросы частот бетатронных колебаний в сгустке будут описываться формулой

$$\omega_y = \omega_0 v_y + \omega_0 v_y \alpha_p \frac{\Delta p}{p} + \omega_0 \frac{d v_y}{d \ln p} \frac{\Delta p}{p}. \quad (3.2)$$

Для частот бетатронных колебаний, удаленных от машинных резонансов, состояние сгустка без когерентных колебаний будет описываться функцией распределения

$$f_0 = \frac{1}{(2\pi)^2} G(I) Y(\Delta p) \rho_0(\phi). \quad (3.3)$$

Условия нормировки функции f_0 запишем в виде

$$\int_0^\infty dIG(I) = 1, \quad \int_{-\infty}^\infty d\Delta p Y(\Delta p) = 1, \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \rho_0(\phi) = 1. \quad (3.4)$$

Малые поперечные когерентные колебания сгустка описываются добавлением к функции распределения f_0 гармоник фаз бетатронных колебаний частиц:

$$f = f_0(I, \Delta p, \phi) + \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{m=\pm 1} f_m(I, \Delta p, \phi, t) e^{im\psi}. \quad (3.5)$$

Амплитуды f_m находятся линеаризацией уравнения Власова вблизи f_0 и усреднением быстроосциллирующих слагаемых линеаризованного уравнения по периоду обращения частиц вдоль замкнутой орбиты. В результате, приходим к уравнению:

$$\frac{\partial f_m}{\partial t} + im\omega_y f_m + \frac{\omega_0 \alpha_p}{p} \Delta p \frac{\partial f_m}{\partial \phi} + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)_m \overline{F(\theta, t)} \frac{\partial f_0}{\partial I} = 0, \quad (3.6)$$

в котором $\overline{F(\theta, t)}$ – усредненное по периоду обращения частиц значение силы, действующей на частицы сгустка со стороны наведенных им полей. Используя соотношение

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)_m = \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi} \frac{\partial y}{\partial \psi} e^{-im\psi} = im \sqrt{\frac{IR_0}{2p\nu_y}} \quad (3.7)$$

и выполняя в (3.6) Фурье-преобразование по времени

$$\int_0^\infty dt e^{i\omega t} \frac{\partial f_m}{\partial t} = -f_m(I, \Delta p, \phi, 0) - i\omega f_m(\omega), \quad \text{Im}\omega > 0, \quad (3.8)$$

перепишем уравнение (3.6) в следующем виде:

$$f_m(\omega) + \frac{i(\omega_0 \alpha_p \Delta p)/p}{\Delta\omega_m - \delta\omega_m} \frac{\partial f_m}{\partial \phi} = \frac{if_m(I, \Delta p, \phi, 0)}{\Delta\omega_m - \delta\omega_m} + m \sqrt{\frac{IR_0}{2p\nu_y}} \overline{(F(\theta, t))_\omega} \frac{\partial f_0/\partial I}{\Delta\omega_m - \delta\omega_m}. \quad (3.9)$$

Здесь $\Delta\omega_m = \omega - \omega_m$, $\omega_m = m\omega_0\nu_y$, а

$$\delta\omega_m = m \left(\omega_0 \nu_y \alpha_p + \omega_0 \frac{d\nu_y}{d \ln p} \right) \frac{\Delta p}{p}. \quad (3.10)$$

Второе слагаемое в левой части уравнения (3.9) описывает влияние продольной подвижности частиц в сгустке на амплитуды когерентных колебаний. За счет частиц, движущихся попутно со сгустком, оно может приводить к некоторому замыканию обратной связи когерентных колебаний в сгустке и, следовательно, к образованию собственных мод колебаний. По порядку величины это слагаемое оценивается соотношением

$$\delta f_m = \frac{i(\omega_0 \alpha_p \Delta p)/p}{\Delta\omega_m - \delta\omega_m} \frac{\partial f_m}{\partial \phi} \sim \frac{i\omega_s}{\Delta\omega_m} \frac{\partial f_m}{\partial \ln \phi}.$$

Величина δf_m будет мала по сравнению с амплитудами $f_m(\omega)$ при выполнении условия

$$\frac{\omega_s}{|\Delta\omega_m|} \ll \left| \frac{\partial \ln f_m}{\partial \ln \phi} \right|, \quad (3.11)$$

которое будет предполагаться справедливым в наших последующих вычислениях. Для упрощения вычислений в этой главе мы сначала изучим свойства когерентных колебаний монохроматического сгустка ($Y(\Delta p) = \delta(\Delta p)$). В этом случае особенности колебаний, обусловленные эффектом прерывания пучка, доминируют.

Пренебрегая в (3.9) вкладами быстроосциллирующих слагаемых и предполагая, что наведенные поля описываются локализованным и широкополосным импедансом $Z^\perp(\omega)$, пишем

$$\begin{aligned} \overline{F_y(\omega)} = & -i \frac{Ne^2\omega_0}{\Pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\phi} Z^\perp(\omega_m + n\omega_0) \int_0^\infty dI' \sqrt{\frac{R_0 I'}{2p\nu_y}} \\ & \times \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{2\pi} e^{-in\phi'} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p' f_m(I', \Delta p', \phi', \omega). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Подставляя это выражение в (3.9) и определив величины

$$\chi_m^{(0)}(\Delta p, \phi) = \int_0^\infty dI \sqrt{\frac{R_0 I}{2p\nu_y}} f_m(I, \Delta p, \phi, 0), \quad (3.13)$$

$$\chi_m(\Delta p, \phi, \omega) = \int_0^\infty dI \sqrt{\frac{R_0 I}{2p\nu_y}} f_m(I, \Delta p, \phi, \omega), \quad (3.14)$$

получим

$$\begin{aligned} \chi_m(\Delta p, \phi, \omega) = & \frac{i\chi_m^{(0)}(\Delta p, \phi)}{\Delta\omega_m - \delta\omega_m} + \frac{mNe^2\omega_0 Y(\Delta p)\rho_0(\phi)}{4\pi p\nu_y \Delta\omega_m - \delta\omega_m} \\ & \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} iZ^\perp(\omega + n\omega_0) e^{in\phi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p' \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{2\pi} \chi_m(\Delta p', \phi', \omega) e^{-in\phi'}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Для упрощения вычислений мы предположим, что начальные значения амплитуд $\chi_m^{(0)}(\Delta p, \phi)$ определяются выражениями вида

$$\chi_m^{(0)}(\Delta p, \phi) = \delta(\Delta p)\rho_0(\phi)\chi_m^{(0)}(\phi). \quad (3.16)$$

Определив также новую неизвестную функцию $\chi_m(\phi, \omega)$ выражением

$$\chi_m(\Delta p, \phi, \omega) = \delta(\Delta p)\rho_0(\phi)\chi_m(\phi, \omega), \quad (3.17)$$

заменяем уравнение (3.15) следующим:

$$\begin{aligned} \chi_m(\phi, \omega) = & \frac{i\chi_m^{(0)}(\phi)}{\Delta\omega_m} + \frac{mNe^2\omega_0}{4\pi p\nu_y \Delta\omega_m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} iZ^\perp(\omega + n\omega_0) e^{in\phi} \\ & \times \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{2\pi} \rho_0(\phi') \chi_m(\phi', \omega) e^{-in\phi'}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

После решения этого уравнения зависимости амплитуд χ_m от времени находятся обратным преобразованием Фурье

$$\chi_m(\phi, t) = e^{-i\omega_m t} \int_C \frac{d\Delta\omega_m}{2\pi} e^{-i\Delta\omega_m t} \chi_m(\phi, \omega). \quad (3.19)$$

В последнем выражении контур интегрирования по $\Delta\omega_m$ идет от $\Delta\omega_m = -\infty$ в точку $\Delta\omega_m = \infty$ параллельно оси $\text{Re}\Delta\omega_m$ и выше особенностей амплитуд $\chi_m(\phi, \omega)$.

3.2. Модель

Для упрощения последующих вычислений мы воспользуемся моделью, в которой наведенные сгустком поля описываются поперечным импедансом

$$Z^\perp(\omega) = \frac{-cZ_0}{b_\perp^2(\omega + i\Gamma\omega_0)}, \quad (3.20)$$

где b_\perp – радиус вакуумной камеры в месте расположения электродов. Такое выражение для $Z^\perp(\omega)$ описывает наведенные поля в электродах, которые электродинамически эквивалентны параллельному LR-контур. Согласно (3.20) наведенные частицы поля равны нулю в моменты времени до прохождения частицы электродов ($Z^\perp(t) = 0$, для $t < 0$) и экспоненциально убывают в последующие моменты времени:

$$iZ^\perp(t) = -\frac{cZ_0}{b_\perp^2} e^{-\omega_0 \Gamma t}, \quad t \geq 0. \quad (3.21)$$

По этой причине импеданс в выражении (3.20) описывает запоминание наведенных частицами полей. После прихода к электродам на следующем периоде $2\pi/\omega_0$ колебания сгустка возмущаются полями, которые он наводил на предыдущих оборотах. Согласно формуле (3.21) амплитуды остаточных наведенных полей пропорциональны множителю $\exp(-2\pi\Gamma)$. Они оказываются малыми, если значение параметра запоминания Γ велико.

Подставив (3.20) в уравнение (3.18), получим

$$\chi_m(\phi) = \frac{i\chi_m^{(0)}(\phi)}{\Delta\omega_m} - iW_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in\phi} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{2\pi} \rho_0(\phi') \chi_m(\phi') e^{-in\phi'}}{(m\nu_y + n + i\Gamma)}, \quad (3.22)$$

где

$$W_m = \frac{\Omega_m}{\Delta\omega_m}, \quad (3.23)$$

а

$$\Omega_m = \frac{mNe^2\omega_0 Z_0 \beta_{av}}{4\pi p b_\perp^2}, \quad \beta_{av} = \frac{R_0}{\nu_y}. \quad (3.24)$$

Физический смысл параметра Ω_m устанавливается решением однородной части уравнения (3.22), записанного для пучка нулевой длины. Полагая в (3.22) $\chi_m^{(0)}(\phi) = 0$ и $\rho_0(\phi) = \delta(\phi)$, пишем

$$\Delta\omega_m \chi_m(\phi) = \frac{\Omega_m}{2\pi i} \chi_m(0) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in\phi}}{(m\nu_y + n + i\Gamma)}. \quad (3.25)$$

Вычислив функцию $\chi_m(\phi)$ в точке $\phi = 0$, получаем дисперсионное уравнение

$$\Delta\omega_m = \frac{\Omega_m}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{m\nu_y + n + i\Gamma}. \quad (3.26)$$

Используя формулу суммирования (1.14), выделим в (3.26) вклады однооборотных и многооборотных эффектов

$$\begin{aligned} \Delta\omega_m &= \frac{\Omega_m}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn}{m\nu_y + n + i\Gamma} + \frac{\Omega_m}{2\pi i} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dne^{-2\pi i k n}}{m\nu_y + n + i\Gamma} \\ &= -\frac{\Omega_m}{2} - \Omega_m \sum_{k=1}^{\infty} \exp(2\pi i k m \nu_y - 2\pi \Gamma k). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Предполагая, например, $\Gamma \gg 1$, перепишем это выражение в следующем виде:

$$\Delta\omega_m \simeq -\frac{\Omega_m}{2} - \Omega_m e^{-2\pi\Gamma} [\cos(2\pi m \nu_y) + i \sin(2\pi m \nu_y)]. \quad (3.28)$$

Первое слагаемое в правой части этой формулы описывает однооборотное взаимодействие сгустка с наведенными полями. Оно описывает появление в спектре когерентных колебаний сдвига частоты, равного $-\Omega_m/2$. Второе слагаемое представляет собой вклады многооборотного взаимодействия в комплексный когерентный сдвиг частоты моды. Декременты таких когерентных колебаний записываются в виде

$$-\text{Im}\Delta\omega_m = \Omega_m e^{-2\pi\Gamma} \sin(2\pi m \nu_y). \quad (3.29)$$

Колебания устойчивы, если дробная часть ν_y находится в интервале $(0, 1/2)$. Как и ожидалось, когерентные колебания сгустка нулевой длины не обладают особенностями, характерными для эффекта прерывания пучка.

3.3. Сгусток конечной длины

Получим решения уравнения (3.22) в предположениях о том, что длина сгустка не равна нулю, а величины $\chi_m^{(0)}(\phi)$ и $\rho_0(\phi)$ являются гладкими функциями ϕ . Используя формулу суммирования

$$\sum_n b_n = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dn b(n) e^{2\pi i n l}, \quad (3.30)$$

выделим в уравнении (3.22) вклады однооборотной и многооборотной частей

$$\begin{aligned} \chi_m(\phi) &= \frac{i\chi_m^{(0)}(\phi)}{\Delta\omega_m} + W_m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn}{2\pi i} \frac{e^{in\phi}}{(m\nu_y + n + i\Gamma)} \\ &\times \int_0^{2\pi} d\phi' \rho_0(\phi') \chi_m(\phi') e^{-in\phi'} + W_m \int_0^{2\pi} d\phi' \rho_0(\phi') \chi_m(\phi') \\ &\times \sum_{l=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn}{2\pi i} \frac{\exp(-2\pi i n l + in(\phi - \phi'))}{(m\nu_y + n + i\Gamma)}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Второе слагаемое в правой части этого уравнения описывает возмущения движения частиц полями, наведенными сгустком на данном обороте, а третье – возмущения полями, наведенными на предыдущих оборотах. Мы будем измерять длину сгустка ϕ_b в тех же единицах, что и ϕ , а также положим, что длина сгустка невелика ($\phi_b \ll \pi$). Тогда прямое вычисление в (3.31) интегралов по n приводит к результату

$$p_m(\phi) = \frac{i\chi_m^{(0)}(\phi) \exp(imv_y\phi - \Gamma\phi)}{\Delta\omega_m} - W_m \int_{\phi}^{2\pi} d\phi' \rho_0(\phi') p_m(\phi') \quad (3.32)$$

$$- W_m \Lambda_m \int_0^{2\pi} d\phi' \rho_0(\phi') p_m(\phi').$$

Здесь мы обозначили

$$p_m = \chi_m(\phi) \exp(imv_y\phi - \Gamma\phi), \quad (3.33)$$

а

$$\Lambda_m = \frac{\exp(2\pi(imv_y - \Gamma))}{1 - \exp(2\pi(imv_y - \Gamma))}. \quad (3.34)$$

Для коротких сгустков ($\phi_b \ll \pi$) ввиду быстрой сходимости в правой части (3.32) интегралов по ϕ' мы распространим пределы интегрирования на бесконечные интервалы, заменяя в соответствующих интегралах 2π на ∞ и 0 на $-\infty$. Это приводит к уравнению

$$p_m(\phi) = \frac{i\chi_m^{(0)}(\phi) \exp((imv_y - \Gamma)\phi)}{\Delta\omega_m} - W_m \int_{\phi}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') p_m(\phi') \quad (3.35)$$

$$- W_m \Lambda_m \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') p_m(\phi').$$

Второе слагаемое в правой части этого интегрального уравнения описывает эффект прерывания сгустка. Третье слагаемое, которое описывает влияние запоминания наведенных полей, замыкает обратную связь когерентных колебаний сгустка. Поэтому оно описывает самосогласованные когерентные колебания. Благодаря вкладу этого члена уравнение (3.35) становится неоднородным интегральным уравнением Фредгольма. Однородная часть этого уравнения ($\chi_m^{(0)}(\phi) = 0$) имеет нетривиальные решения в тех случаях, когда значение $\Delta\omega_m$ совпадает с одной из собственных частот когерентных колебаний сгустка. В таком случае решение $p_m(\phi)$ является собственной функцией моды колебаний.

Вычислим спектр собственных частот когерентных колебаний сгустка, взаимодействующего с электродами, поперечный импеданс которых описывается выражением (3.20). Подставив в уравнение (3.35) $\chi_m^{(0)}(\phi) = 0$, пишем

$$p_m(\phi) = -W_m \int_{\phi}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') p_m(\phi') - W_m \Lambda_m \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') p_m(\phi'). \quad (3.36)$$

Из этого уравнения находим предельные значения функции $p_m(\phi)$:

$$p_m(\infty) = -W_m \Lambda_m C_m, \quad C_m = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \rho_0(\phi) p_m(\phi) \quad (3.37)$$

и

$$p_m(-\infty) = -W_m(1 + \Lambda_m)C_m. \quad (3.38)$$

Дифференцируя обе части в (3.36) по ϕ , преобразуем это интегральное уравнение в дифференциальное:

$$\frac{dp_m}{d\phi} = W_m \rho_0(\phi) p_m(\phi).$$

Решение последнего уравнения записывается в виде

$$\ln \frac{p_m(\phi)}{p_m(-\infty)} = W_m \int_{-\infty}^{\phi} d\phi' \rho_0(\phi'),$$

или

$$p_m(\phi) = -W_m (1 + \Lambda_m) C_m \exp \left(W_m \int_{-\infty}^{\phi} d\phi' \rho_0(\phi') \right). \quad (3.39)$$

Подстановкой (3.39) в (3.37) получим

$$-W_m \Lambda_m C_m = -W_m (1 + \Lambda_m) C_m \exp \left(W_m \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') \right).$$

Вспоминая условие нормировки (3.4), которое теперь записывается в следующем виде:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') = 1,$$

приходим к дисперсионному уравнению задачи

$$\Lambda_m = (1 + \Lambda_m) \exp(W_m). \quad (3.40)$$

Подставив сюда определение (3.23), пишем

$$\exp \left(\frac{\Omega_m}{\Delta\omega_m} - \ln \frac{\Lambda_m}{1 + \Lambda_m} \right) = 1. \quad (3.41)$$

Корни дисперсионного уравнения (3.41) определяются формулой

$$\frac{\Omega_m}{\Delta\omega_m^{(k)}} - \ln \frac{\Lambda_m}{1 + \Lambda_m} = 2\pi i k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.42)$$

или

$$\Delta\omega_m^{(k)} = \frac{\Omega_m}{2\pi i k + \ln \Lambda_m - \ln(1 + \Lambda_m)}. \quad (3.43)$$

Целые числа k имеют смысл номеров мод собственных решений уравнения (3.36). То обстоятельство, что число таких мод бесконечно велико, связано с описанием сгустка как непрерывной среды, функция распределения которой является гладкой функцией координат частиц в фазовом пространстве. Для сгустка, состоящего из N дискретных частиц, число мод k не превышает N . Еще одно смысловое значение параметра k устанавливается с помощью уравнений (3.39) и (3.42). Приняв для простоты

$$\rho_0(\phi) = \frac{1}{\phi_b} \begin{cases} 1, & 0 \leq \phi \leq \phi_b, \\ 0, & \phi < 0, \phi > \phi_b \end{cases} \quad (3.44)$$

и вспоминая, что $W_m = \Omega_m / \Delta\omega_m$, запишем собственные функции $p_m(\phi, t)$ в виде:

$$p_{m,k}(\phi, t) = C_{m,k} \exp \left[\left(2\pi i k + \ln \frac{\Lambda_m}{1 + \Lambda_m} \right) \frac{\phi}{\phi_b} - i \Delta\omega_m^{(k)} t \right], \quad (3.45)$$

где постоянные $C_{m,k}$ находятся с помощью условий нормировки решений. Согласно этим выражениям найденные собственные функции представляют собой искаженные плоские волны с длиной волны, равной $\phi_b/|k|$, и распространяющиеся попутно пучку для мод с $k > 0$ либо вверх по пучку для мод с $k < 0$. Изменения амплитуд этих волн вдоль пучка пропорциональны множителю

$$|p_{m,k}(\phi, t)| \propto \left| \frac{\Lambda_m}{1 + \Lambda_m} \right|^{\phi/\phi_b} \exp(\operatorname{Im}(\Delta\omega_m^{(k)})t). \quad (3.46)$$

Правая часть в формуле (3.43) явно указывает на то, что собственные частоты задачи $\Delta\omega_m^{(k)}$ не являются аналитическими функциями параметра Λ_m . Это означает, что в тех случаях, когда запоминание наведенных полей является слабым и, в соответствии с этим, величины Λ_m малы, уравнения (3.35) и (3.36) нельзя решать по теории возмущений с удержанием в вычислениях $p_m(\phi)$ ограниченного числа членов разложения решения по степеням малого параметра Λ_m . Физический смысл такого формального результата очевиден. Запоминание наведенных полей замыкает обратную связь бетатронных когерентных колебаний хвостовых частиц сгустка с когерентными колебаниями головной части сгустка. Эта обратная связь приводит к появлению нового качества когерентных колебаний сгустка – формированию спектра собственных значений колебаний. Как показано в главе 2 при нарушении такой связи спектр собственных значений отсутствует, а свойства поперечных когерентных колебаний совпадают со свойствами неустойчивости за счет эффекта прерывания пучка. Указанное формирование спектра собственных значений когерентных колебаний возможно только в накопителях заряженных частиц.

Для наведенных полей, описываемых импедансом, определенного формулой (3.20), подстановка в (3.43) значений Λ_m из (3.34) приводит к выражению

$$\ln \frac{\Lambda_m}{1 + \Lambda_m} = 2\pi(im_y\delta v_y - \Gamma), \quad (3.47)$$

где δv_y – дробная часть безразмерной частоты бетатронных колебаний ($0 \leq \delta v_y \leq 1$). В таком случае формула (3.43) записывается в виде

$$\Delta\omega_m^{(k)} = \frac{\Omega_m}{2\pi} \frac{1}{i(k + m\delta v_y) - \Gamma}, \quad (3.48)$$

или

$$\operatorname{Re}\Delta\omega_m^{(k)} = -\frac{\Omega_m}{2\pi} \frac{\Gamma}{(k + m\delta v_y)^2 + \Gamma^2} \quad (3.49)$$

и

$$-\operatorname{Im}\Delta\omega_m^{(k)} = \frac{\Omega_m}{2\pi} \frac{k + m\delta v_y}{(k + m\delta v_y)^2 + \Gamma^2}. \quad (3.50)$$

Если, например, принять, что $m = 1$, то согласно этим уравнениям все моды с отрицательными значениями номера моды ($k < 0$) неустойчивы, а моды с $k \geq 0$ – устойчивы независимо от значения δv_y (рис. 1). Такие условия устойчивости существенно отличаются от полученных для сгустка нулевой длины (например, в формуле (3.28)). Значение максимального инкремента когерентных колебаний не превышает величины

$$(\operatorname{Im}\Delta\omega_m^{(k)})_{\max} = \frac{\Omega_m}{4\pi\Gamma}. \quad (3.51)$$

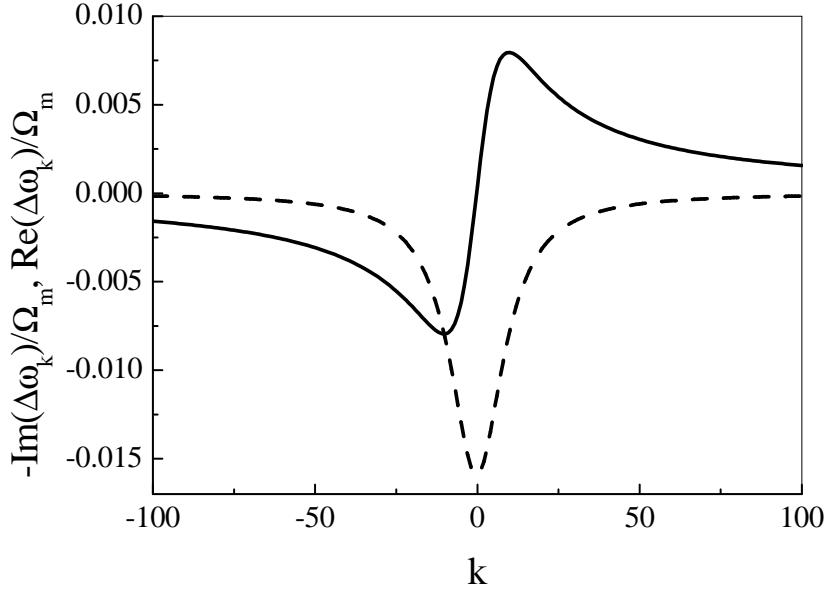


Рис. 1. Пример зависимости декрементов (сплошная линия) и когерентных сдвигов частоты (пунктир) мод от номера моды k ; $\Gamma = 10$, $v_y = 0.25$, $m = 1$

Поскольку весь расчет велся в предположении быстрых когерентных колебаний ($|\Delta\omega_m| \gg \omega_s$), уравнение (3.48), вообще говоря, подразумевает, что допустимые значения параметра запоминания полей Γ , а также номеров мод k , должны быть ограничены сверху:

$$|k|, \Gamma \ll \frac{\Omega_m}{4\pi\omega_s}. \quad (3.52)$$

Как видно из формул (3.49) и (3.50), собственные частоты мод убывают с ростом величины номера моды k . Это означает, что в плоскости комплексной переменной $\Delta\omega_m$ собственные частоты $\Delta\omega_m^{(k)}$ сгущаются по направлению к точке $\Delta\omega_m = 0$ (рис. 2).

Суммирование собственных частот $\Delta\omega_m^{(k)}$ по номерам мод приводит к выражению

$$\Delta\omega_{m,\Sigma} = \frac{\Omega_m}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k + m\delta v_y + i\Gamma}. \quad (3.53)$$

Эта величина совпадает с вычисленной по формулам (3.26) или (3.27)

$$\Delta\omega_{m,\Sigma} = -\frac{\Omega_m}{2} - \Omega_m \frac{\exp(2\pi(im\delta v_y - \Gamma))}{1 - \exp(2\pi(im\delta v_y - \Gamma))}. \quad (3.54)$$

Такое совпадение является следствием теоремы о сумме собственных частот когерентных колебаний (например, в [2]).

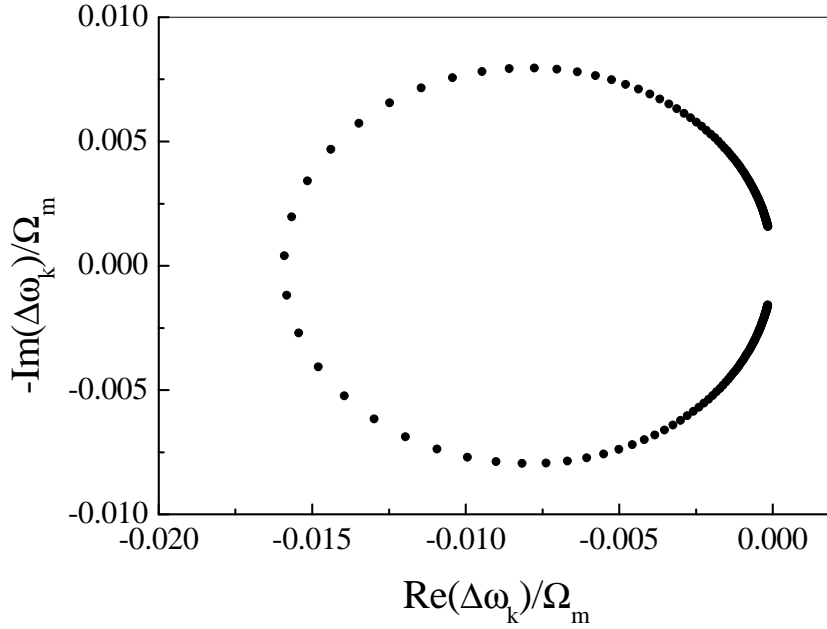


Рис. 2. Пример карты мод когерентных колебаний для $\Gamma = 10$, $v_y = 0.25$, $m = 1$

3.4. Зависимости решений от времени

Зависимости амплитуд χ_m от времени находятся подстановкой решений уравнения (3.35) в формулу (3.19). Результат записывается в виде

$$\chi_m(\phi, t) = e^{-i\omega_m t} \int_C \frac{d\Delta\omega_m}{2\pi} e^{-i\Delta\omega_m t} \chi_m(\phi, \omega), \quad (3.55)$$

где функция $\chi_m(\phi, \omega)$ находится решением интегрального уравнения (3.35), а контур интегрирования C проходит параллельно действительной оси плоскости комплексной переменной $\Delta\omega_m$ выше всех особенностей подынтегрального выражения.

Аналогично уравнению (3.36) решения неоднородного уравнения (3.35):

$$p_m(\phi) = \frac{i\chi_m^{(0)}(\phi) \exp(imv_y\phi - \Gamma\phi)}{\Delta\omega_m} - W_m \int_{\phi}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') p_m(\phi') \quad (3.56)$$

$$- W_m \Lambda_m \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') p_m(\phi'),$$

вычисляются его преобразованием в эквивалентное дифференциальное уравнение. Мы упростим вычисления, предположив выполнение граничных условий

$$\lim_{\phi \rightarrow \pm\infty} \frac{i\chi_m^{(0)}(\phi) \exp(imv_y\phi - \Gamma\phi)}{\Delta\omega_m} = 0. \quad (3.57)$$

Определив

$$Q(\phi) = \frac{d}{d\phi} \left(\frac{i\chi_m^{(0)}(\phi) \exp(imv_y\phi - \Gamma\phi)}{\Delta\omega_m} \right) \quad (3.58)$$

и продифференцировав обе части в (3.56) по ϕ , получаем

$$\frac{dp_m}{d\phi} = Q(\phi) + W_m \rho_0(\phi) p_m(\phi). \quad (3.59)$$

Используя (3.56) и (3.57), устанавливаем, что граничные значения $p_m(\pm\infty)$ определяются уравнениями (3.37) и (3.38):

$$p_m(\infty) = -W_m \Lambda_m C_m, \quad p_m(-\infty) = -W_m(1 + \Lambda_m)C_m. \quad (3.60)$$

Решение уравнения (3.59) ищем в виде

$$p_m(\phi) = A(\phi) \exp \left(W_m \int_{-\infty}^{\phi} d\phi' \rho_0(\phi') \right), \quad (3.61)$$

где амплитуда $A(\phi)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dA}{d\phi} = Q(\phi) \exp \left(-W_m \int_{-\infty}^{\phi} d\phi' \rho_0(\phi') \right).$$

Поскольку $A(\infty) = -W_m \Lambda_m C_m \exp(-W_m)$, пишем

$$A(\phi) = -W_m \Lambda_m e^{-W_m} C_m - \int_{\phi}^{\infty} d\phi' Q(\phi') \exp \left(-W_m \int_{-\infty}^{\phi'} d\phi'' \rho_0(\phi'') \right).$$

После подстановки этого выражения в (3.61) получаем

$$\begin{aligned} p_m(\phi) = & -W_m \Lambda_m C_m \exp \left(-W_m \int_{\phi}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') \right) \\ & - \int_{\phi}^{\infty} d\phi' Q(\phi') \exp \left(-W_m N(\phi', \phi) \right). \end{aligned} \quad (3.62)$$

При вычислении второго слагаемого в правой части этого выражения мы учли тождество

$$W_m \int_{-\infty}^{\phi} d\phi' \rho_0(\phi') - W_m \int_{-\infty}^{\phi'} d\phi'' \rho_0(\phi'') = -W_m N(\phi', \phi).$$

Для нахождения постоянной C_m запишем вторую формулу в (3.60) в виде

$$\begin{aligned} W_m(1 + \Lambda_m)C_m &= -p_m(-\infty) \\ &= W_m \Lambda_m C_m e^{-W_m} + \int_{-\infty}^{\infty} d\phi Q(\phi) \exp \left(-W_m \int_{-\infty}^{\phi} d\phi'' \rho_0(\phi'') \right). \end{aligned}$$

Разрешая это уравнение относительно $\Lambda_m C_m$, получаем

$$\Lambda_m C_m = \frac{B}{W_m(1 - B e^{-W_m})} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi Q(\phi) \exp \left(-W_m \int_{-\infty}^{\phi} d\phi'' \rho_0(\phi'') \right), \quad (3.63)$$

где

$$B = \frac{\Lambda_m}{1 + \Lambda_m} = \exp(2\pi(imv_y - \Gamma)). \quad (3.64)$$

Далее, после интегрирования в правой части (3.63) по ϕ' по частям и использования граничных условий из (3.57)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \frac{d}{d\phi} \left(\frac{i\chi_m^{(0)}(\phi) e^{imv_y\phi - \Gamma\phi}}{\Delta\omega_m} \right) \exp \left(-W_m \int_{-\infty}^{\phi} d\phi'' \rho_0(\phi'') \right) = \\ = \frac{iW_m}{\Delta\omega_m} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \chi_m^{(0)}(\phi) \rho_0(\phi) e^{imv_y\phi - \Gamma\phi - W_m \int_{-\infty}^{\phi} d\phi'' \rho_0(\phi'')} \end{aligned}$$

находим

$$\Lambda_m C_m = \frac{iB}{\Delta\omega_m (1 - Be^{-W_m})} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \rho_0(\phi) \chi_m^{(0)}(\phi) \quad (3.65)$$

$$\times \exp \left(imv_y v_y \phi - \Gamma\phi - W_m \int_{-\infty}^{\phi} d\phi'' \rho_0(\phi'') \right).$$

Подстановка этого выражения в (3.62) позволяет записать решение $p_m(\phi)$ в следующем виде:

$$p_m(\phi) = -W_m \Lambda_m C_m \exp \left(-W_m \int_{\phi}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') \right) - A_1, \quad (3.66)$$

где

$$A_1 = \int_{\phi}^{\infty} d\phi' \frac{d}{d\phi'} \left(\frac{i\chi_m^{(0)}(\phi') e^{imv_y \phi' - \Gamma\phi'}}{\Delta\omega_m} \right) \exp(-W_m N(\phi', \phi)). \quad (3.67)$$

Интегрирование в правой части этого выражения по ϕ' по частям:

$$A_1 = \int_{\phi}^{\infty} d\phi' \frac{d}{d\phi'} \left(\frac{i\chi_m^{(0)}(\phi') e^{imv_y \phi' - \Gamma\phi'}}{\Delta\omega_m} \right)$$

$$\times \exp(-W_m N(\phi', \phi)) = -\frac{i\chi_m^{(0)}(\phi) e^{imv_y \phi - \Gamma\phi}}{\Delta\omega_m}$$

$$+ \frac{iW_m}{\Delta\omega_m} \int_{\phi}^{\infty} d\phi' \chi_m^{(0)}(\phi') \rho_0(\phi') e^{imv_y \phi' - \Gamma\phi' - W_m N(\phi', \phi)}$$

и подстановка A_1 в (3.66) завершает вычисление решения интегрального уравнения (3.56):

$$p_m(\phi) = \frac{i\chi_m^{(0)}(\phi) e^{imv_y \phi - \Gamma\phi}}{\Delta\omega_m} - \frac{iW_m B}{\Delta\omega_m (1 - Be^{-W_m})} \quad (3.68)$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') \chi_m^{(0)}(\phi') e^{imv_y \phi' - \Gamma\phi' - W_m \Phi(\phi, \phi')}$$

$$- \frac{iW_m}{\Delta\omega_m} \int_{\phi}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') \chi_m^{(0)}(\phi') e^{imv_y \phi' - \Gamma\phi' - W_m N(\phi', \phi)},$$

где

$$\Phi(\phi, \phi') = \int_{\phi}^{\infty} d\phi'' \rho_0(\phi'') + \int_{-\infty}^{\phi'} d\phi'' \rho_0(\phi'') \quad (3.69)$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^{\phi} d\phi'' \rho_0(\phi'') + \int_{-\infty}^{\phi'} d\phi'' \rho_0(\phi'') = 1 + N(\phi', \phi).$$

Используя уравнение (3.33)

$$\chi_m(\phi, \omega) = \exp(-imv_y \phi + \Gamma\phi) p_m(\phi),$$

получаем

$$\chi_m(\phi, \omega) = \frac{i\chi_m^{(0)}(\phi)}{\Delta\omega_m} - \frac{iW_m B}{\Delta\omega_m (1 - Be^{-W_m})} \quad (3.70)$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') \chi_m^{(0)}(\phi') e^{(imv_y - \Gamma)(\phi' - \phi) - W_m \Phi}$$

$$- \frac{iW_m}{\Delta\omega_m} \int_{\phi}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') \chi_m^{(0)}(\phi') e^{(imv_y - \Gamma)(\phi' - \phi) - W_m N(\phi', \phi)}.$$

После подстановки $\chi_m(\phi, \omega)$ в формулу (3.55) мы можем записать

$$e^{i\omega_m t} \chi_m(\phi, t) = \chi_m^{(0)}(\phi) + X^{(1)}(\phi, t) + X^{(2)}(\phi, t), \quad (3.71)$$

где

$$X^{(1)}(\phi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') \chi_m^{(0)}(\phi') \exp((imv_y - \Gamma)(\phi' - \phi)) \quad (3.72)$$

$$\times B \int_C \frac{d\Delta\omega_m}{2\pi i} \frac{W_m \exp(-i\Delta\omega_m t - W_m \Phi)}{\Delta\omega_m (1 - B e^{-W_m})},$$

а

$$X^{(2)}(\phi, t) = \int_{\phi}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') \chi_m^{(0)}(\phi') \exp((imv_y - \Gamma)(\phi' - \phi)) \quad (3.73)$$

$$\times \int_C \frac{d\Delta\omega_m}{2\pi i} \frac{W_m}{\Delta\omega_m} \exp(-i\Delta\omega_m t - W_m N(\phi', \phi)).$$

Функция $X^{(1)}(\phi, t)$ представляет собой самосогласованную часть решения, а $X^{(2)}(\phi, t)$ – ту его часть, которая описывает эффект прерывания пучка. Обе функции $X^{(1,2)}$ находятся замыканием контура интегрирования в нижнюю полуплоскость комплексной переменной $\Delta\omega_m$ и вычислением вычетов в особых точках подынтегрального выражения. В формуле (3.72) это простые полюсы в точках $\Delta\omega_m$, совпадающие с корнями дисперсионного уравнения (3.40). В формуле (3.73) это существенно особая точка при $\Delta\omega_m = 0$.

Для вычисления функции $X^{(1)}(\phi, t)$ пишем

$$X^{(1)}(\phi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') \chi_m^{(0)}(\phi') e^{(imv_y - \Gamma)(\phi' - \phi)} S(\phi, \phi', t), \quad (3.74)$$

где

$$S(\phi, \phi', t) = B \int_C \frac{d\Delta\omega_m}{2\pi i} \frac{W_m \exp(-i\Delta\omega_m t - W_m \Phi)}{\Delta\omega_m (1 - B e^{-W_m})}, \quad (3.75)$$

$W_m = \Omega_m / \Delta\omega_m$, а контур интегрирования C идет из точки $\Delta\omega_m = -\infty$ в точку $\Delta\omega_m = +\infty$ выше всех особенностей подынтегрального выражения (рис. 3). Согласно (3.75) особыми точками подынтегрального выражения являются простые полюсы в точках $\Delta\omega_m$, которые представляют собой корни дисперсионного уравнения (3.40), записанного в виде $1 = B e^{-W_m}$. Положения этих корней в плоскости $\Delta\omega_m$ определяются формулой (3.48):

$$\Delta\omega_m^{(k)} = \frac{\Omega_m}{2\pi i} \frac{1}{(k + m\delta v_y) - \Gamma}. \quad (3.76)$$

Напомним, что в этой формуле величина δv_y определена как дробная часть безразмерной частоты бетатронных колебаний ($0 \leq \delta v_y \leq 1$). Замыкая контур интегрирования C в нижнюю полуплоскость $\Delta\omega_m$ дугой полуокружности бесконечно большого радиуса (например, как показано на рис. 3), пишем

$$S(\phi, \phi', t) = -2\pi i B \sum_k R_k, \quad (3.77)$$

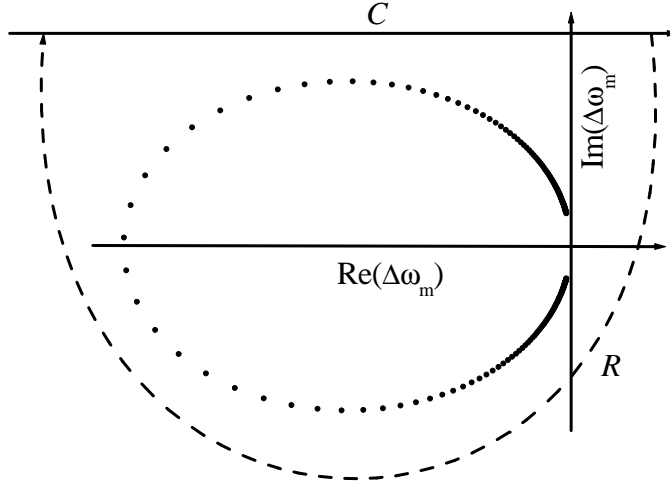


Рис. 3. Контур интегрирования в формуле (3.75); точками показано положение полюсов подынтегрального выражения, первые 100 мод

где R_k – вычеты подынтегрального выражения в (3.75) в полюсах (3.76). Прямым вычислением вычетов:

$$\begin{aligned}
 R_k &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\Omega_m}{(\Delta\omega_m^{(k)})^2} \frac{\exp\left(-i\Delta\omega_m^{(k)}t - \Phi\Omega_m/\Delta\omega_m^{(k)}\right)}{\left[\frac{d}{du}(1 - B \exp(-\Omega_m/u))\right]_{u=\Delta\omega_m^{(k)}}} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\Omega_m}{(\Delta\omega_m^{(k)})^2} \frac{(\Delta\omega_m^{(k)})^2 \exp\left(-i\Delta\omega_m^{(k)}t - \Phi\Omega_m/\Delta\omega_m^{(k)}\right)}{\left[-\Omega_m B \exp(-\Omega_m/\Delta\omega_m^{(k)})\right]} \\
 &= -\frac{1}{2\pi i} \exp\left(-i\Delta\omega_m^{(k)}t - \frac{\Omega_m}{\Delta\omega_m^{(k)}}\Phi\right),
 \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned}
 S(\phi, \phi', t) &= B \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-i\Delta\omega_m^{(k)}t - \frac{\Omega_m}{\Delta\omega_m^{(k)}}\Phi\right) \\
 &= B \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-i\Delta\omega_m^{(k)}t - 2\pi(i[k + m\delta v_y] - \Gamma)\Phi\right),
 \end{aligned}$$

или

$$S(\phi, \phi', t) = \exp(2\pi(im\delta v_y - \Gamma)(1 - \Phi)) S_1, \quad (3.78)$$

где

$$S_1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\Omega_m t}{2\pi(k + m\delta v_y + i\Gamma)} - 2\pi i k \Phi\right). \quad (3.79)$$

Используя формулу суммирования (3.30), перепишем S_1 в виде:

$$S_1 = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp\left(-\frac{\Omega_m t}{2\pi(k + m\delta v_y + i\Gamma)} - 2\pi i k (\Phi - l)\right). \quad (3.80)$$

Подынтегральное выражение в правой части формулы (3.80) является аналитической функцией k в верхней полуплоскости комплексной переменной k . По этой причине все слагаемые с положительными номерами l не дают вклада в величину S_1 . Поэтому пишем

$$S_1 = \sum_{l=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp \left(-\frac{\Omega_m t}{2\pi(k + m\delta v_y + i\Gamma)} - 2\pi i k(l + \Phi) \right). \quad (3.81)$$

Подставив сюда разложение

$$\exp \left(-\frac{\Omega_m t}{2\pi(k + m\delta v_y + i\Gamma)} \right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!(k + m\delta v_y + i\Gamma)^r} \left(-\frac{\Omega_m t}{2\pi} \right)^r$$

и замыкая в (3.81) контур интегрирования по k в нижнюю полуплоскость, получаем

$$\begin{aligned} S_1 &= -2\pi i \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{\Omega_m t}{2\pi} \right)^{r+1}}{r!(r+1)!} \left(\frac{d^r}{dk^r} e^{-2\pi i k(l+\Phi)} \right)_{k=-m\delta v_y - i\Gamma} \\ &= i\Omega_m t \sum_{l=0}^{\infty} \exp(2\pi(im\delta v_y - \Gamma)(l + \Phi)) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(i\Omega_m t(l + \Phi))^r}{r!(r+1)!}. \end{aligned}$$

Используя соотношение

$$J_1(z) = \frac{z}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(r+1)!r!} \left(-\frac{z^2}{4} \right)^r, \quad (3.82)$$

где $J_1(z)$ – функция Бесселя первого порядка, пишем

$$S_1 = -\sqrt{-i\Omega_m t} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi(im\delta v_y - \Gamma)(l+\Phi)}}{\sqrt{l+\Phi}} J_1 \left(2\sqrt{-i\Omega_m t(l+\Phi)} \right). \quad (3.83)$$

Подстановкой этого выражения в формулы (3.78), а затем в (3.74), получаем

$$\begin{aligned} X^{(1)}(\phi, t) &= -\sqrt{-i\Omega_m t} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') \chi_m^{(0)}(\phi') e^{(imv_y - \Gamma)(2\pi + \phi' - \phi)} \\ &\times \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\exp(2\pi l(im\delta v_y - \Gamma))}{\sqrt{\Phi + l}} J_1 \left(2\sqrt{-i\Omega_m t(\Phi + l)} \right). \end{aligned} \quad (3.84)$$

Отметим, что полученное выражение $X^{(1)}(\phi, t)$ полностью обусловлено появлением у когерентных колебаний сгустка самосогласованных мод. Хотя амплитуды самих мод экспоненциально зависят от времени, их линейные комбинации могут лишиться этого свойства. Так, согласно формуле (3.84) в начальные моменты времени $\Omega_m t \ll 1$ функция $X^{(1)}(\phi, t)$ увеличивается пропорционально величине

$$X^{(1)}(\phi, t) \simeq i\Omega_m t \frac{e^{(imv_y - \Gamma)(2\pi - \phi)}}{1 - e^{(imv_y - \Gamma)2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') \chi_m^{(0)}(\phi') e^{(imv_y - \Gamma)\phi'},$$

а в асимптотической области $\Omega_m t \gg 1$ – по квазиэкспоненциальному закону:

$$\begin{aligned}
X^{(1)}(\phi, t) &\simeq -\frac{(-i\Omega_m t)^{1/4}}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') \chi_m^{(0)}(\phi') \\
&\times \exp(imv_y - \Gamma)(2\pi + \phi' - \phi) \\
&\times \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\exp\left(2\pi(im\delta v_y - \Gamma)l + \sqrt{2\Omega_m t(l + \Phi)}\right)}{(l + \Phi)^{3/4}}.
\end{aligned} \tag{3.85}$$

Такие асимптоты следовало бы, скорее, ожидать для колебаний режима эффекта прерывания сгустка, а не для самосогласованных когерентных колебаний. Одной из причин для такого поведения решений является отсутствие в спектре собственных колебаний (3.48) одной или нескольких явно лидирующих мод. В таких условиях интерференция соседних мод колебаний уменьшает величины амплитуд, которые могут быть достигнуты к заданному моменту времени. Поскольку амплитуды колебаний в (3.84) увеличиваются медленнее, чем по экспоненциальному закону, неустойчивости таких мод могут подавляться затуханием Ландау, обусловленным разбросами частот бетатронных колебаний частиц сгустка.

Доля эффекта прерывания пучка в когерентных колебаниях описывается функцией $X^{(2)}(\phi, t)$. Стягивая в (3.73) контур интегрирования C в контур C_0 , окружающий начало координат $\Delta\omega_m = 0$, пишем

$$X^{(2)}(\phi, t) = \int_{\phi}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') \chi_m^{(0)}(\phi') \exp((imv_y - \Gamma)(\phi' - \phi)) S, \tag{3.86}$$

где

$$S = \frac{\Omega_m}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{d\Delta\omega_m}{\Delta\omega_m^2} \exp\left(-i\Delta\omega_m t - \frac{V}{\Delta\omega_m}\right), \tag{3.87}$$

а

$$V = \Omega_m N(\phi', \phi). \tag{3.88}$$

Используя разложение

$$\exp\left(-\frac{V}{\Delta\omega_m}\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \frac{(-V)^r}{\Delta\omega_m^r},$$

преобразуем правую часть в формуле (3.87) к выражению

$$S = \frac{\Omega_m}{2\pi i} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-V)^r}{r!} \int_{C_0} \frac{d\Delta\omega_m e^{-i\Delta\omega_m t}}{\Delta\omega_m^{r+2}} = i\Omega_m t \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(itV)^r}{r!(r+1)!},$$

или

$$S = -\frac{\sqrt{-i\Omega_m t}}{\sqrt{N(\phi', \phi)}} J_1\left(2\sqrt{-i\Omega_m t N(\phi', \phi)}\right). \tag{3.89}$$

В результате получаем

$$\begin{aligned}
X^{(2)}(\phi, t) &= -\sqrt{-i\Omega_m t} \int_{\phi}^{\infty} d\phi' \frac{\rho_0(\phi') \chi_m^{(0)}(\phi')}{\sqrt{N(\phi', \phi)}} \\
&\times \exp((imv_y - \Gamma)(\phi' - \phi)) J_1\left(2\sqrt{-i\Omega_m t N(\phi', \phi)}\right).
\end{aligned} \tag{3.90}$$

Как это свойственно эффекту прерывания пучка, такая формула описывает кумулятивное накопление раскачки сгустка в точке ϕ когерентными колебаниями в предыдущих точках сгустка. Сравнивая формулы (3.84) и (3.90), находим, что в тех случаях, когда запоминание наведенных полей является слабым ($2\pi\Gamma \gg 1$), вклад в амплитуды колебаний эффекта прерывания, вообще, превалирует ($|X^{(2)}| \gg |X^{(1)}|$).

Поскольку амплитуды колебаний в (3.90) увеличиваются во времени медленнее, чем по экспоненциальному закону, эта часть когерентных колебаний сгустка может быть стабилизирована охлаждением пучка, устройствами широкополосной обратной связи и расфазировкой когерентных колебаний за счет разбросов частот колебаний частиц. Следует обратить внимание на то обстоятельство, что затухание Ландау не подавляет когерентных колебаний, которые описываются формулой (3.90).

Глава 4

Многосгустковые неустойчивости

Перейдем к изучению быстрых неустойчивостей поперечных когерентных колебаний пучков, которые составлены из многих сгустков. Такие пучки используются, например, для увеличения светимости современных установок с встречными пучками. Из общих соображений ясно, что, если пучок состоит из некоторого количества сгустков, то у него появляются дополнительные степени свободы, которые могут возбуждаться наведенными пучком полями. Поэтому спектр когерентных колебаний такого пучка будет содержать частоты, описывающие как колебания отдельных сгустков, так и относительные колебания сгустков в пучке. В соответствии с этим возможные виды когерентных колебаний пучка, содержащего отдельные сгустки, идентифицируются как односгустковые и многосгустковые когерентные колебания пучка. Если пучок состоит из одного сгустка, то его когерентные колебания, по определению, являются односгустковыми. Многие особенности быстрых односгустковых неустойчивостей поперечных когерентных колебаний пучка обсуждались в предыдущих главах пособия.

Характерные особенности многосгустковых неустойчивостей, в общем случае, определяются способом заполнения пучка сгустками. Наиболее распространенной и часто исследуемой является такая картина заполнения пучка, в которой, например, M идентичных сгустков частиц равномерно распределены вдоль периметра замкнутой орбиты с периодом Π/M . Число сгустков M , разумеется, должно составлять целую долю кратности ВЧ-поля накопителя. Например, пучок может формироваться заполнением каждой сепаратрисы синхротронных колебаний частиц или каждой второй или, например, каждой пятой сепаратрисы и т. д. В таком случае, вычисление спектров и собственных векторов когерентных колебаний существенно упрощается (например, в [1]). Такую схему заполнения пучка сгустками принято называть равномерной.

В последние примерно два десятка лет все чаще стали обсуждаться и использоваться такие картины заполнения пучка, в которых равномерное заполнение сепаратрис сгустками прерывается, начиная с некоторого значения номера сгустка M_t . При этом в пучке образуется зазор в $M_g = M - M_t$ сгустков. Необходимость в использовании такого зазора в заполнении пучка часто обусловлена теми или иными техническими причинами. Например, в коллайдере КЕКВ зазор, длина которого составляет 10 % периметра замкнутой орбиты пучка, используется для удаления из пучка вторичных заряженных частиц (электронов, ионов). Эти вторичные частицы

могут образовываться частицами сгустка при его движении вдоль замкнутой орбиты. Если параметры сгустков в пучке идентичны, то мы будем называть такую картину заполнения пучка квазиравномерной, а заполненную часть пучка – дугом сгустков, или просто дугом.

4.1. Когерентные колебания дуга сгустков

Как и прежде, мы проведем расчеты для быстрых вертикальных когерентных колебаний M_t идентичных сгустков, которые равномерно заполняют дуг. Предполагаем, что период следования сгустков в дуге равен $T_b = T_0/M$, где T_0 – период обращения сгустков вдоль замкнутой орбиты, а M – целое число, равное целой доле кратности ВЧ-системы накопителя. Как уже упоминалось, мы полагаем что после дуга сгустков в пучке следует зазор длиной $M_g = M - M_t$ межсгустковых расстояний и не содержащий ни одного сгустка. Бетатронные колебания частиц в сгустках с подавленной продольной подвижностью описываем уравнениями (3.1), но с одной оговоркой. Дело в том, что, если мы хотим описывать возмущения когерентных колебаний сгустков полями, которые пучок наводит в окружающих его электродах, мы должны учесть, что различные сгустки пучка будут проходить эти электроды в различные моменты времени. Если азимутальное расстояние между сгустками в дуге равно $2\pi/M$ и если принять, что первый сгусток в дуге проходит некоторый азимут на замкнутой орбите θ в нулевой момент времени, то сгусток дуга с номером a , где $0 \leq a \leq M_t - 1$, будет проходить эту точку на замкнутой орбите в момент времени aT_b . Чтобы формально учесть это обстоятельство, мы будем записывать уравнения (3.1) для частиц сгустка с номером a в виде

$$y = \sqrt{\frac{R_0 I}{p v_y}} \cos \psi, \quad p_y = -\sqrt{\frac{p v_y I}{R_0}} \sin \psi, \quad (4.1)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_y, \quad \theta_a = \omega_0 (t - aT_b) + \phi, \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{\omega_0 \alpha_p}{p} \Delta p.$$

Поскольку мы собираемся описывать когерентные колебания идентичных сгустков за исключением случаев, когда это может привести к недоразумению, мы не будем специально нумеровать динамические переменные частиц и другие величины, относящиеся к сгусткам.

В этой главе мы ограничимся изучением поперечных когерентных колебаний монохроматических сгустков. Состояния без когерентных колебаний коротких, идентичных сгустков с подавленной продольной подвижностью частиц будем описывать функциями распределения:

$$f_0^{(a)} = f_0 = \frac{1}{2\pi} \delta(\Delta p) G(I) \rho_0(\phi) \quad (4.2)$$

с условиями нормировки:

$$\int_0^\infty dI G(I) = 1, \quad \int_{-\infty}^\infty d\phi \rho_0(\phi) = 1. \quad (4.3)$$

Быстрые вертикальные дипольные когерентные колебания сгустка a описываются гармониками функции распределения:

$$f^{(a)} = f_0(I, \Delta p, \phi) + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=\pm 1} f_m^{(a)}(I, \Delta p, \phi, t) e^{im\psi}. \quad (4.4)$$

В первом приближении метода усреднений и для малых когерентных колебаний амплитуды $f_m^{(a)}(I, \Delta p, \phi, t)$ вычисляются решением систем линеаризованных уравнений Власова:

$$\frac{\partial f_m^{(a)}}{\partial t} + im\omega_y f_m^{(a)} + 2\pi im \sqrt{\frac{IR_0}{2p\nu_y} \overline{F^{(a)}(\theta_a, t)}} \frac{\partial f_0}{\partial I} = 0. \quad (4.5)$$

Здесь $F^{(a)}(\theta_a, t)$ – вертикальная компонента силы, описывающей возмущения колебаний частиц сгустка с номером a наведенными пучком полями. С помощью Фурье-преобразования по времени

$$\int_0^\infty dt e^{i\omega t} \frac{\partial f_m^{(a)}}{\partial t} = -f_m^{(a)}(I, \Delta p, \phi, 0) - i\omega f_m^{(a)}(\omega), \quad \text{Im}\omega > 0 \quad (4.6)$$

и отбрасыванием в (4.5) быстроосциллирующих слагаемых получим уравнение для Фурье-амплитуд $f_m^{(a)}(\omega)$

$$f_m^{(a)}(\omega) = \frac{if_m^{(a)}(I, \phi, 0)}{\Delta\omega_m} + m \sqrt{\frac{IR_0}{2p\nu_y} \overline{F_y^{(a)}(\omega)}} \frac{\rho_0(\phi) dG/dI}{\Delta\omega_m}. \quad (4.7)$$

Здесь $\Delta\omega_m = \omega - \omega_m$, $\omega_m = m\omega_0\nu_y$, а $f_m^{(a)}(I, \phi, 0)$ – начальные значения гармоник $f_m^{(a)}$.

Предположив, что наведенные пучком дипольные поля могут быть описаны локализованным и широкополосным поперечным импедансом $Z^\perp(\omega)$, пишем

$$\begin{aligned} \overline{F_y^{(a)}(\omega)} &= -i \frac{Ne^2\omega_0}{\Pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{2\pi ian}{M}\right) Z^\perp(\omega_m + n\omega_0) e^{in\phi} \\ &\times \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{2\pi} e^{-in\phi'} \sum_{b=0}^{M_t-1} \exp\left(\frac{2\pi ibn}{M}\right) \int_0^\infty dI' \sqrt{\frac{R_0 I'}{2p\nu_y}} f_m^{(b)}(I', \phi', \omega). \end{aligned} \quad (4.8)$$

В отличие от формулы (3.12) правая часть этого выражения содержит вклады токов всех сгустков пучка. Поэтому силы, определенные в (4.8), могут связывать колебания частиц сгустка a с когерентными колебаниями всех сгустков пучка. После подстановки (4.8) в правую часть (4.7) и определения величин

$$\chi_m^{(a)}(\phi, 0) = \int_0^\infty dI \sqrt{\frac{R_0 I}{2p\nu_y}} f_m^{(a)}(I, \phi, 0), \quad (4.9)$$

$$\chi_m^{(a)}(\phi, \omega) = \int_0^\infty dI \sqrt{\frac{R_0 I}{2p\nu_y}} f_m^{(a)}(I, \phi, \omega) \quad (4.10)$$

приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} \chi_m^{(a)}(\phi, \omega) &= \frac{i\chi_m^{(a)}(\phi, 0)}{\Delta\omega_m} + \frac{mNe^2\omega_0\rho_0(\phi)}{4\pi p v_y \Delta\omega_m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{2\pi i a n}{M}\right) \\ &\times iZ^\perp(\omega_m + n\omega_0) e^{in\phi} \sum_{b=0}^{M_t-1} \exp\left(\frac{2\pi i b n}{M}\right) \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{2\pi} e^{-in\phi'} \chi_m^{(b)}(\phi', \omega). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Определив в этом уравнении

$$\chi_m^{(a)}(\phi, 0) = \rho_0(\phi) D_m^{(a)}(\phi, 0) \quad (4.12)$$

и

$$\chi_m^{(a)}(\phi, \omega) = \rho_0(\phi) D_m^{(a)}(\phi, \omega), \quad (4.13)$$

перепишем его в виде

$$\begin{aligned} D_m^{(a)}(\phi, \omega) &= \frac{iD_m^{(a)}(\phi, 0)}{\Delta\omega_m} \\ &+ \frac{mNe^2\omega_0}{4\pi p v_y \Delta\omega_m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{2\pi i a n}{M}\right) iZ^\perp(\omega_m + n\omega_0) e^{in\phi} \\ &\times \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{2\pi} \rho_0(\phi') e^{-in\phi'} \sum_{b=0}^{M_t-1} \exp\left(\frac{2\pi i b n}{M}\right) D_m^{(b)}(\phi', \omega). \end{aligned} \quad (4.14)$$

После того как уравнение (4.14) решено зависимости амплитуд $D_m^{(a)}$ от времени найдутся обратным преобразованием Фурье:

$$D_m^{(a)}(\phi, t) = e^{-i\omega_m t} \int_C \frac{d\Delta\omega_m}{2\pi} e^{-i\Delta\omega_m t} D_m^{(a)}(\phi, \omega). \quad (4.15)$$

Напомним, что в этом выражении контур интегрирования C идет из точки $\Delta\omega_m = -\infty$ в точку $\Delta\omega_m = \infty$ выше всех особых точек подынтегрального выражения.

Как и прежде, воспользуемся моделью, в которой поперечный импеданс связи определяется формулой (3.20):

$$Z^\perp(\omega) = \frac{-cZ_0}{b_\perp^2(\omega + i\Gamma\omega_0)}. \quad (4.16)$$

Мы уже могли убедиться в том, что такое выражение достаточно упрощает интегральные уравнения для обеспечения их простого решения и достаточно полно описывает запоминание наведенных пучком полей для анализа взаимной важности однооборотных и многооборотных процессов в когерентных колебаниях сгустков.

Подставив (4.16) в уравнение (4.14) и разбив суммирование по n на две части подстановкой $n = Ml + p$, где $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, а $p = 0, 1, \dots, M - 1$, получим

$$\begin{aligned} D_m^{(a)}(\phi, \omega) &= \frac{iD_m^{(a)}(\phi, 0)}{\Delta\omega_m} - iW_m \int_0^{2\pi} d\phi' \rho_0(\phi') \\ &\times \sum_{b=0}^{M_t-1} K_{a,b}(\phi - \phi') D_m^{(b)}(\phi', \omega), \end{aligned} \quad (4.17)$$

где, как и раньше, $W_m = \Omega_m / \Delta\omega_m$,

$$K_{a,b}(\phi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=0}^{M-1} \exp\left(\frac{2\pi ip(b-a)}{M}\right) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i(Ml+p)\phi)}{m\nu_y + Ml + p + i\Gamma}, \quad (4.18)$$

а

$$\Omega_m = \frac{mNe^2\omega_0 Z_0 \beta_{av}}{4\pi p b_{\perp}^2}, \quad \beta_{av} = \frac{R_0}{\nu_y}. \quad (4.19)$$

Напомним, что величина Ω_m представляет собой удвоенное значение когерентного сдвига частоты монохроматического сгустка нулевой длины.

4.2. Многосгустковые моды

Сумма по l в правой части (4.18) вычисляется с помощью формулы суммирования

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} b_l = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dl \exp(2\pi i k l) b(l). \quad (4.20)$$

Удобно отделить в ядре (4.18) вклады однооборотных и односгустковых эффектов ($k=0$) от вкладов, описывающих взаимное влияние сгустков в пучке, а также многооборотные возмущения сгустков наведенными пучком полями. Для этого пишем:

$$\begin{aligned} K_{a,b}(\phi) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{p=0}^{M-1} \exp\left(\frac{2\pi ip(b-a)}{M}\right) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i(Ml+p)\phi)}{m\nu_y + Ml + p + i\Gamma} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{p=0}^{M-1} \exp\left(\frac{2\pi ip(b-a)}{M}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dl \frac{\exp(i(Ml+p)\phi)}{m\nu_y + Ml + p + i\Gamma} \\ &+ \frac{1}{2\pi} \sum_{p=0}^{M-1} \exp\left(\frac{2\pi ip(b-a)}{M}\right) \sum_{k \neq 0} \int_{-\infty}^{\infty} dl \frac{\exp(i(Ml+p)\phi + 2\pi i k l)}{m\nu_y + Ml + p + i\Gamma}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

или

$$K_{a,b}(\phi) = K_{a,b}^{(sb)}(\phi) + K_{a,b}^{(mb)}(\phi). \quad (4.22)$$

По определению, односгустковая и однооборотная часть ядра $K_{a,b}$ записывается в виде

$$\begin{aligned} K_{a,b}^{(sb)}(\phi) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{p=0}^{M-1} \exp\left(\frac{2\pi ip(b-a)}{M}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dl \frac{\exp(i(Ml+p)\phi)}{m\nu_y + Ml + p + i\Gamma} \\ &= \frac{M}{2\pi} \delta_{a,b} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{M} \frac{\exp(iu\phi)}{m\nu_y + u + i\Gamma}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

где $\delta_{a,b}$ – символ Кронеккера ($\delta_{a,a} = 1$, $\delta_{a \neq b} = 0$). В этой формуле интегрирование по l выполняется замыканием контура интегрирования в верхнюю или в нижнюю полуплоскости комплексной переменной l . Так, для $\phi > 0$ контур замыкается в верхнюю полуплоскость. В этой полуплоскости отсутствуют полюсы подынтегрального

выражения. Поэтому результатом интегрирования является выражение: $K_{a,b}^{(sb)}(\phi) = 0$ для $\phi > 0$. Для $\phi < 0$ контур интегрирования замыкается в нижнюю полуплоскость l , где подынтегральное выражение имеет простой полюс в точке

$$l = -\frac{m\nu_y + p + i\Gamma}{M}. \quad (4.24)$$

Вычисление вычета подынтегрального выражения в этом полюсе дает

$$K_{a,b}^{(sb)}(\phi) = -i\delta_{a,b} \exp(-i(m\nu_y + i\Gamma)\phi), \quad \phi < 0, \quad (4.25)$$

Связь колебаний сгустков в пучке и многооборотные возмущения сгустков описываются в (4.22) слагаемым

$$K_{a,b}^{(mb)}(\phi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=0}^{M-1} \exp\left(\frac{2\pi ip(b-a)}{M}\right) \times \sum_{k \neq 0} \int_{-\infty}^{\infty} dl \frac{\exp(2\pi ilk + i(Ml+p)\phi)}{m\nu_y + Ml + p + i\Gamma}. \quad (4.26)$$

Если положения сгустков пучка хорошо разделены вдоль замкнутой орбиты ($2\pi \gg M|\phi|$), то в слагаемых с $k > 0$ интегралы по l вычисляются замыканием контура интегрирования в верхнюю полуплоскость комплексной переменной l . В этой полуплоскости соответствующие подынтегральные выражения не имеют особенностей. Поэтому в (4.26) все слагаемые с $k > 0$ равны нулю. Этот результат означает, что когерентные колебания сгустка пучка с номером a возмущаются наведенными полями предшествующих сгустков пучка на данном обороте или полями, наведенными в электродах всеми сгустками пучка на предыдущих оборотах. В соответствии с этими замечаниями пишем

$$K_{a,b}^{(mb)}(\phi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=0}^{M-1} \exp\left(\frac{2\pi ip(b-a)}{M}\right) \times \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dl \frac{\exp(-2\pi ilk + i(Ml+p)\phi)}{m\nu_y + Ml + p + i\Gamma}.$$

Интеграл по l вычисляется замыканием контура интегрирования в нижнюю полуплоскость комплексной переменной l . Вычисление вычета в полюсе $m\nu_y + Ml + p + i\Gamma = 0$ приводит к выражению

$$K_{a,b}^{(mb)}(\phi) = -ie^{-i(m\nu_y + i\Gamma)\phi} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(2\pi ik \frac{m\nu_y + i\Gamma}{M}\right) Q_{a,b}^{(k)}, \quad (4.27)$$

где

$$Q_{a,b}^{(k)} = \frac{1}{M} \sum_{p=0}^{M-1} \exp\left(\frac{2\pi ip(b-a+k)}{M}\right). \quad (4.28)$$

По определению, коэффициенты $Q_{a,b}^{(k)}$ обладают следующими свойствами периодичности:

$$Q_{a,b}^{(k+M)} = Q_{a,b}^{(k)}, \quad Q_{a,M-r}^{(k)} = Q_{a,-r}^{(k)}. \quad (4.29)$$

В выражении (4.27) полезно разделить вклады слагаемых с номерами $1 \leq k \leq a$ и слагаемых с номерами $k \geq a + 1$. После такого разделения пишем

$$K_{a,b}^{(mb)}(\phi) = K_{a,b}^{(st)}(\phi) + K_{a,b}^{(mt)}(\phi), \quad (4.30)$$

где

$$K_{a,b}^{(st)}(\phi) = -iH_a e^{-i(mv_y + i\Gamma)\phi} \sum_{k=1}^a \exp\left(2\pi i k \frac{mv_y + i\Gamma}{M}\right) Q_{a,b}^{(k)}, \quad (4.31)$$

$H_0 = 0$ и $H_a = 1$ для $a = 1, 2, \dots, M_t - 1$, а

$$K_{a,b}^{(mt)}(\phi) = -ie^{-i(mv_y + i\Gamma)\phi} \sum_{k=a+1}^{\infty} \exp\left(2\pi i k \frac{mv_y + i\Gamma}{M}\right) Q_{a,b}^{(k)}. \quad (4.32)$$

В области $1 \leq k \leq a$ факторы $Q_{a,b}^{(k)}$ не обращаются в нуль только для тех номеров сгустков a и b , которые удовлетворяют условию $0 \leq b \leq a - 1$. Заметим, что это условие не выполняется для первого сгустка пучка ($a = 0$). Колебания этого сгустка возбуждаются полями, наведенными пучком на предыдущих оборотах. Они являются существенно многооборотными. Для остальных сгустков пучка ($a \geq 1$) ядра $K_{a,b}^{(st)}(\phi)$ описывают возмущения колебаний сгустка a полями, наведенными предыдущими сгустками пучка при прохождении ими электродов на текущем обороте. Мы можем назвать эту группу слагаемых, как описывающих многосгустковые, но однооборотные связи когерентных колебаний сгустков. Учитывая эти обстоятельства, пишем ($0 \leq b \leq a - 1$)

$$K_{a,b}^{(st)}(\phi) = -iH_a \exp\left(2\pi i \frac{mv_y + i\Gamma}{M}(a - b) - i(mv_y + i\Gamma)\phi\right). \quad (4.33)$$

Перейдем к вычислению ядра, описывающего многооборотные связи колебаний сгустков $K_{a,b}^{(mt)}(\phi)$. Сумма в правой части (4.32) вычисляется сдвигом $k \rightarrow k + a$. В результате этого преобразования приходим к выражению

$$\begin{aligned} S_a &= \sum_{k=a+1}^{\infty} \exp\left(2\pi i k \frac{mv_y + i\Gamma}{M}\right) Q_{a,b}^{(k)} = \exp\left(2\pi i a \frac{mv_y + i\Gamma}{M}\right) \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(2\pi i k \frac{mv_y + i\Gamma}{M}\right) \frac{1}{M} \sum_{p=1}^M \exp\left(\frac{2\pi i p(b + k)}{M}\right). \end{aligned}$$

Поскольку k и b – положительные числа, входящая в это выражение сумма

$$S_k = \frac{1}{M} \sum_{p=1}^M \exp\left(\frac{2\pi i p(b + k)}{M}\right)$$

отлична от нуля лишь в тех случаях, когда

$$k = Mr - b, \quad r = 1, 2, \dots$$

Поэтому

$$\begin{aligned} S_a &= \exp\left(2\pi i a \frac{m\nu_y + i\Gamma}{M}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(2\pi i k \frac{m\nu_y + i\Gamma}{M}\right) \delta_{k, rM-b} \\ &= \exp\left(2\pi i [a-b] \frac{m\nu_y + i\Gamma}{M}\right) \sum_{r=1}^{\infty} e^{2\pi i r(m\nu_y + i\Gamma)}, \end{aligned}$$

а ядро $K_{a,b}^{(mt)}(\phi)$ переписывается в виде

$$K_{a,b}^{(mt)}(\phi) = -i\Lambda \exp\left(2\pi i \frac{m\nu_y + i\Gamma}{M}(a-b) - i(m\nu_y + i\Gamma)\phi\right), \quad (4.34)$$

где

$$\Lambda = \sum_{r=1}^{\infty} \exp(2\pi i r(m\nu_y + i\Gamma)) = \frac{\exp(2\pi i m\nu_y - 2\pi\Gamma)}{1 - \exp(2\pi i m\nu_y - 2\pi\Gamma)}. \quad (4.35)$$

Эти слагаемые не равны нулю при всех возможных значениях номеров сгустков a и b ($0 \leq a \leq M_t - 1$ и $0 \leq b \leq M_t - 1$). Они описывают возмущения колебаний сгустка номер a наведенными полями всех сгустков пучка, наведенными ими на предыдущих оборотах.

Подставляя полученные выражения для $K_{a,b}(\phi)$ в уравнение (4.17), распространяя область интегрирования по ϕ на бесконечный интервал $|\phi| < \infty$ и определив

$$P_m^{(a)}(\phi) = D_m^{(a)}(\phi, \omega) \exp\left(i(m\nu_y + i\Gamma)\phi - 2\pi i a \frac{m\nu_y + i\Gamma}{M}\right), \quad (4.36)$$

преобразуем (4.17) в следующую систему интегральных уравнений для новых неизвестных функций $P_m^{(a)}(\phi)$:

$$\begin{aligned} P_m^{(a)}(\phi) &= \frac{iP_m^{(a)}(\phi, 0)}{\Delta\omega_m} - W_m \int_{\phi}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') P_m^{(a)}(\phi') \\ &\quad - H_a W_m \sum_{b=0}^{a-1} X_b - W_m \Lambda \sum_{b=0}^{M_t-1} X_b. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Здесь

$$P_m^{(a)}(\phi, 0) = D_m^{(a)}(\phi, 0) \exp\left(i(m\nu_y + i\Gamma)\phi - 2\pi i a \frac{m\nu_y + i\Gamma}{M}\right), \quad (4.38)$$

а

$$X_a = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') P_m^{(a)}(\phi'). \quad (4.39)$$

Решения уравнений (4.37) находятся разложением функций $P_m^{(a)}(\phi)$ в ряды по собственным векторам следующей системы однородных алгебраических уравнений:

$$\lambda_q X_a^{(q)} = H_a \sum_{b=0}^{a-1} X_b^{(q)} + \Lambda \sum_{b=0}^{M_t-1} X_b^{(q)}. \quad (4.40)$$

Для вычисления векторов $X_a^{(q)}$ и собственных чисел λ пишем

$$\lambda X_0 = \Lambda \sum_{b=0}^{M_t-1} X_b, \quad \lambda X_a = \sum_{b=0}^{a-1} X_b + \Lambda \sum_{b=0}^{M_t-1} X_b, \quad a \geq 1. \quad (4.41)$$

Решения этих уравнений ищем в виде

$$X_a = C v^a. \quad (4.42)$$

Подстановка таких векторов в уравнения (4.41) приводит к выражениям

$$\lambda = \Lambda \sum_{b=0}^{M_t-1} v^b = \Lambda \frac{1 - v^{M_t}}{1 - v} \quad (4.43)$$

и

$$\lambda v^a = \sum_{b=0}^{a-1} v^b + \lambda = \frac{1 - v^a}{1 - v} + \lambda,$$

или

$$\frac{1 - v^a}{1 - v} + \lambda(1 - v^a) = 0, \quad 1 - v = -\frac{1}{\lambda}, \quad v = 1 + \frac{1}{\lambda}.$$

Подстановка этого выражения в (4.43) приводит к соотношению:

$$\lambda = \Lambda \frac{1 - \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^{M_t}}{1 - 1 - \frac{1}{\lambda}} = -\lambda \Lambda \left(1 - \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^{M_t}\right),$$

которое может быть переписано в виде уравнения для определения v :

$$\begin{aligned} v^{M_t} &= \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^{M_t} = 1 + \frac{1}{\Lambda} = 1 + \frac{1 - \exp(2\pi i m \nu_y - 2\pi \Gamma)}{\exp(2\pi i m \nu_y - 2\pi \Gamma)} \\ &= \exp(-2\pi i m \nu_y + 2\pi \Gamma). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Разрешая (4.44) относительно v , получаем:

$$v_q = \exp\left(-2\pi i \frac{m_y \nu_y - q}{M_t} + \frac{2\pi \Gamma}{M_t}\right), \quad q = 0, 1, \dots, M_t - 1 \quad (4.45)$$

и

$$\lambda_q = \frac{1}{v_q - 1} = \frac{\exp\left(2\pi i \frac{m \nu_y + i \Gamma}{M_t} - \frac{2\pi i q}{M_t}\right)}{1 - \exp\left(2\pi i \frac{m \nu_y + i \Gamma}{M_t} - \frac{2\pi i q}{M_t}\right)}. \quad (4.46)$$

Таким образом, собственные векторы $X_a^{(q)}$ записываются в виде

$$X_a^{(q)} = \frac{1}{\sqrt{M_t} r_a} \exp\left(\frac{2\pi i (q - m \nu_y) a}{M_t}\right), \quad r_a = \exp\left(-\frac{4\pi \Gamma}{M_t} a\right). \quad (4.47)$$

Всего имеется M_t собственных векторов. Они удовлетворяют условию ортогональности

$$\sum_{a=0}^{M_t-1} X_a^{(q)} X_a^{(q')*} r_a = \frac{1}{M_t} \sum_{a=0}^{M_t-1} \exp\left(\frac{2\pi i a (q - q')}{M_t}\right) = \delta_{q, q'} \quad (4.48)$$

и полноты

$$\sum_{q=0}^{M_t-1} X_a^{(q)} X_b^{(q)*} = \frac{\delta_{a,b}}{r_a}. \quad (4.49)$$

Набор векторов $X_a^{(q)}$ и собственных значений λ_q описывают многосгустковые моды пучка с квазиоднородным заполнением его сгустками. Согласно (4.35) и (4.40) эти величины являются функциями дробной части безразмерной частоты бетатронных колебаний ν_y . Это является следствием того обстоятельства, что собственные векторы $X_a^{(q)}$ и собственные значения λ_q определены лишь в тех случаях, когда запоминание наведенных полей является длительным ($\Lambda \neq 0$).

Подставив в (4.37) разложения

$$P_m^{(a)}(\phi) = \sum_{q=0}^{M_t-1} X_a^{(q)} P_m^{(q)}(\phi), \quad (4.50)$$

$$H_a \sum_{b=0}^{a-1} X_b + \Lambda \sum_{b=0}^{M_t-1} X_b = \sum_{q=0}^{M_t-1} \lambda_q A_q X_a^{(q)}, \quad (4.51)$$

где

$$P_m^{(q)}(\phi) = \sum_{a=0}^{M_t-1} X_a^{(q)*} r_a P_m^{(a)}(\phi), \quad (4.52)$$

а

$$A_q = \sum_{a=0}^{M_t-1} X_a X_a^{(q)*} r_a, \quad (4.53)$$

пишем

$$\begin{aligned} P_m^{(q)}(\phi) &= \frac{i}{\Delta\omega_m} \sum_{a=0}^{M_t-1} X_a^{(q)*} r_a P_m^{(a)}(\phi, 0) - W_m \int_{\phi}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') P_m^{(q)}(\phi') \\ &\quad - W_m \sum_{a=0}^{M_t-1} X_a^{(q)*} r_a \sum_{q'=0}^{M_t-1} \lambda_{q'} A_{q'} X_a^{(q')}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Учитывая условие ортогональности векторов $X_a^{(q)}$ (4.48), находим

$$P_m^{(q)}(\phi) = \frac{i P_m^{(q)}(\phi, 0)}{\Delta\omega_m} - W_m \int_{\phi}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') P_m^{(q)}(\phi') - W_m \lambda_q A_q. \quad (4.55)$$

Здесь

$$P_m^{(q)}(\phi, 0) = \sum_{q=0}^{M_t-1} X_a^{(q)*} r_a P_m^{(a)}(\phi, 0). \quad (4.56)$$

Система уравнений (4.55) диагональна по номеру моды многосгустковых когерентных колебаний q . Это означает, что односгустковые взаимодействия когерентных

колебаний в пучке, состоящем из идентичных сгустков и разделенных равными расстояниями между сгустками, не смешивают моды с различными номерами q . Объединив формулы (4.52) и (4.36), выразим амплитуды многосгустковых мод $P_m^{(q)}(\phi)$ через амплитуды дипольных моментов сгустков $D_m^{(a)}(\phi, \omega)$

$$\begin{aligned}
P_m^{(q)}(\phi) &= \sum_{a=0}^{M_t-1} X_a^{(q)*} r_a D_m^{(a)}(\phi, \omega) \\
&\times \exp\left(i(mv_y + i\Gamma)\phi - 2\pi i a \frac{mv_y + i\Gamma}{M}\right) \\
&= \frac{e^{i(mv_y + i\Gamma)\phi}}{\sqrt{M_t}} \sum_{a=0}^{M_t-1} \exp\left(-\frac{2\pi i(q - mv_y)a}{M_t} - \frac{2\pi\Gamma}{M_t}a\right) \\
&\times \exp\left(-2\pi i a \frac{mv_y + i\Gamma}{M}\right) D_m^{(a)}(\phi, \omega) = \frac{e^{i(mv_y + i\Gamma)\phi}}{\sqrt{M_t}} \\
&\times \sum_{a=0}^{M_t-1} \exp\left(-\frac{2\pi i q a}{M_t} + \frac{2\pi i a(mv_y + i\Gamma) M_g}{M_t M}\right) D_m^{(a)}(\phi, \omega),
\end{aligned} \tag{4.57}$$

где $M_g = M - M_t$ – длина зазора в заполнении пучка сгустками, записанная в единицах межсгустковых расстояний в пучке. Из этого выражения видно, что при равномерном заполнении пучка ($M_g = 0$) формулы для амплитуд $P_m^{(q)}(\phi)$ упрощаются

$$P_m^{(q)}(\phi) = \frac{e^{i(mv_y + i\Gamma)\phi}}{\sqrt{M}} \sum_{a=0}^{M-1} \exp\left(-\frac{2\pi i q a}{M}\right) D_m^{(a)}(\phi, \omega), \tag{4.58}$$

а амплитуды дипольных моментов сгустков $D_m^{(a)}(\phi, \omega)$ описываются суперпозициями плоских волн (например, в [1]):

$$D_m^{(a)}(\phi, \omega) = \frac{e^{-i(mv_y + i\Gamma)\phi}}{\sqrt{M}} \sum_{q=0}^{M-1} \exp\left(\frac{2\pi i q a}{M}\right) P_m^{(q)}(\phi). \tag{4.59}$$

Аналогичная формула для пучка сгустков

$$D_m^{(a)}(\phi, \omega) = \frac{e^{-i(mv_y + i\Gamma)\phi}}{\sqrt{M_t}} \sum_{q=0}^{M_t-1} \exp\left(\frac{2\pi i q a}{M_t} - 2\pi i a \frac{mv_y + i\Gamma M_g}{M_t M}\right) P_m^{(q)}(\phi) \tag{4.60}$$

указывает на возможность увеличения амплитуд когерентных колебаний сгустков при приближении номера сгустка к хвостовой части пучка ($a = M_t$).

Используя совпадение уравнений (4.55) и (3.35), мы можем записать решение (4.55) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
P_m^{(q)}(\phi) &= \frac{iP_m^{(q)}(\phi, 0)}{\Delta\omega_m} - \frac{iW_m}{\Delta\omega_m} \frac{\frac{\lambda_q}{1+\lambda_q}}{\left(1 - \frac{\lambda_q}{1+\lambda_q} e^{-W_m}\right)} \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') P_m^{(q)}(\phi', 0) \exp(-W_m \Phi(\phi, \phi')) \\
&- \frac{iW_m}{\Delta\omega_m} \int_{\phi}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') P_m^{(q)}(\phi', 0) \exp(-W_m \Phi_1(\phi, \phi')),
\end{aligned} \tag{4.61}$$

где

$$\Phi(\phi, \phi') = \int_{\phi}^{\infty} d\phi'' \rho_0(\phi'') + \int_{-\infty}^{\phi'} d\phi'' \rho_0(\phi''), \quad (4.62)$$

а

$$\Phi_1(\phi, \phi') = \Phi - 1 = N(\phi', \phi). \quad (4.63)$$

После подстановки этих выражений в (4.50) и (4.36) находим Фурье-амплитуды дипольных бетатронных когерентных колебаний многосгустковых мод пучка

$$D_m^{(q)}(\phi, \omega) = \exp\left(-i(mv_y + i\Gamma)\phi + 2\pi i a \frac{mv_y + i\Gamma}{M}\right) P_m^{(q)}(\phi), \quad (4.64)$$

а также амплитуды когерентных колебаний отдельных сгустков в пучке:

$$D_m^{(a)}(\phi, \omega) = \sum_{q=0}^{M_t-1} X_a^{(q)} D_m^{(q)}(\phi, \omega). \quad (4.65)$$

4.3. Развитие колебаний во времени

Зависимости амплитуд многосгустковых мод или амплитуд когерентных колебаний отдельных сгустков пучка от времени вычисляются согласно формуле (4.15). Так, мы можем записать

$$D_m^{(q)}(\phi, t) = \exp\left(-i(mv_y + i\Gamma)\phi + 2\pi i a \frac{mv_y + i\Gamma}{M}\right) P_m^{(q)}(\phi, t), \quad (4.66)$$

где

$$P_m^{(q)}(\phi, t) = e^{-i\omega_m t} \int_C \frac{d\Delta\omega_m}{2\pi} e^{-i\Delta\omega_m t} P_m^{(q)}(\phi), \quad (4.67)$$

а используя эти соотношения, находим

$$D_m^{(a)}(\phi, t) = \sum_{q=0}^{M_t-1} X_a^{(q)} D_m^{(q)}(\phi, t). \quad (4.68)$$

Как и прежде, контур интегрирования в (4.67) поводится из $\Delta\omega_m = -\infty$ в $\Delta\omega_m = \infty$ выше всех особенностей подынтегрального выражения. Согласно (4.61) такими особыми точками являются существенно особая точка в $\Delta\omega_m = 0$ и простые полюсы в точках, являющихся корнями дисперсионного уравнения:

$$\frac{\lambda_q}{1 + \lambda_q} \exp\left(-\frac{\Omega_m}{\Delta\omega_m}\right) = 1. \quad (4.69)$$

Используя (4.46), находим, что положение этих корней определяется формулой $\Delta\omega_m = \Delta\omega_m^{(q,k)}$, где

$$\Delta\omega_m^{(q,k)} = \frac{\Omega_m}{2\pi} \frac{M_t}{i(M_t k + mv_y - q) - \Gamma}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.70)$$

Величины $\Delta\omega_m^{(q,k)}$ задают комплексные сдвиги частот многосгустковых мод пучка из-за запоминания в электродах наведенных пучком полей. Поскольку

$$-\operatorname{Im}\Delta\omega_m^{(q,k)} = \frac{M_t\Omega_m}{2\pi} \frac{M_t k + m\nu_y - q}{(M_t k + m\nu_y - q)^2 + \Gamma^2}, \quad (4.71)$$

а также поскольку дробная часть ν_y и номера многосгустковых мод q не превышают M_t , моды колебаний с номерами $mk < 0$ являются неустойчивыми. Амплитуды таких неустойчивых мод увеличиваются во времени по экспоненциальному закону.

После очевидных замен убеждаемся в том, что подынтегральное выражение в формуле (4.67) имеет те же особенности, что и аналогичные выражения, например, в формулах (3.72) и (3.73). Поэтому пишем

$$e^{i\omega_m t} P_m^{(q)}(\phi, t) = P_m^{(q)}(\phi, 0) + G^{(1)}(\phi, t) + G^{(2)}(\phi, t). \quad (4.72)$$

Здесь функция $G^{(1)}(\phi, t)$ описывает самосогласованную часть решения $e^{i\omega_m t} P_m^{(q)}(\phi, t)$:

$$\begin{aligned} G^{(1)}(\phi, t) &= \int_C \frac{d\Delta\omega_m}{2\pi i} \frac{W_m}{\Delta\omega_m} \frac{\frac{\lambda_q}{1+\lambda_q} e^{-i\Delta\omega_m t}}{\left(1 - \frac{\lambda_q}{1+\lambda_q} e^{-W_m}\right)} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') P_m^{(q)}(\phi', 0) \exp(-W_m \Phi), \end{aligned} \quad (4.73)$$

а функция $G^{(2)}(\phi, t)$ описывает вклад в решение эффекта прерывания пучка:

$$\begin{aligned} G^{(2)}(\phi, t) &= \int_C \frac{d\Delta\omega_m}{2\pi i} e^{-i\Delta\omega_m t} \frac{W_m}{\Delta\omega_m} \\ &\times \int_{\phi}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') P_m^{(q)}(\phi', 0) \exp(-W_m \Phi_1(\phi, \phi')). \end{aligned} \quad (4.74)$$

Используя аналогии в вычислениях $G^{(1,2)}(\phi, t)$ и функций $X^{(1,2)}$ в формулах (3.72) и (3.73), пишем

$$\begin{aligned} G^{(1)}(\phi, t) &= -\sqrt{-i\Omega_m t} \exp\left(2\pi i \frac{m\nu_y - q}{M_t} - \frac{2\pi\Gamma}{M_t}\right) \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') P_m^{(q)}(\phi', 0) \\ &\times \sum_{l=0}^{\infty} \exp\left(2\pi i l \left(\frac{m\nu_y - q}{M_t} + \frac{i\Gamma}{M_t}\right)\right) \frac{J_1\left(2\sqrt{-i\Omega_m t}(l + \Phi)\right)}{\sqrt{l + \Phi}}, \end{aligned} \quad (4.75)$$

а также

$$\begin{aligned} G^{(2)}(\phi, t) &= -\sqrt{-i\Omega_m t} \int_{\phi}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') P_m^{(q)}(\phi', 0) \\ &\times \frac{J_1\left(2\sqrt{-i\Omega_m t}\Phi_1(\phi, \phi')\right)}{\sqrt{\Phi_1(\phi, \phi')}}. \end{aligned} \quad (4.76)$$

В этих уравнениях функции $P_m^{(q)}(\phi', 0)$ выражаются через начальные амплитуды колебаний сгустков

$$P_m^{(q)}(\phi, 0) = \frac{e^{i(mv_y + i\Gamma)\phi}}{\sqrt{M_t}} \sum_{b=0}^{M_t-1} D_m^{(b)}(\phi, 0) \quad (4.77)$$

$$\times \exp\left(-\frac{2\pi iqb}{M_t} + 2\pi ib \frac{mv_y + i\Gamma}{M_t} \frac{M_g}{M}\right),$$

где $M_g = M - M_t$ – длина зазора в заполнении пучка в единицах расстояний в цуге между сгустками.

Амплитуды когерентных колебаний отдельных сгустков пучка получаются подстановкой функций $P_m^{(q)}(\phi, t)$ в (4.66), а затем в (4.68). Результат записывается в виде

$$e^{i\omega_m t} D_m^{(a)}(\phi, t) = D_m^{(a)}(\phi, 0) + D_{sb}^{(a)}(\phi, t) + D_E^{(a)}(\phi, t). \quad (4.78)$$

Здесь

$$D_{sb}^{(a)}(\phi, t) = -\sqrt{-i\Omega_m t} \int_{\phi}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') D_m^{(a)}(\phi', 0) \quad (4.79)$$

$$\times \exp(i(mv_y + i\Gamma)(\phi' - \phi)) \frac{J_1\left(2\sqrt{-i\Omega_m t \Phi_1(\phi, \phi')}\right)}{\sqrt{\Phi_1(\phi, \phi')}}.$$

Это слагаемое описывает односгустковые и однооборотные когерентные колебания сгустка a в пучке. В силу предполагаемого подавления продольной подвижности частиц оно целиком обусловлено эффектом прерывания пучка. Функция

$$D_E^{(a)}(\phi, t) = D_{st}^{(a)}(\phi, t) + D_{mt}^{(a)}(\phi, t)$$

определяет вклад связи колебаний сгустков в когерентный сигнал пучка. Её появление в формуле (4.78) целиком обязано запоминанию электродами наведенных пучком полей.

4.3.1. Вклады однооборотных и многооборотных наведенных полей

Функции $D_{st}^{(a)}(\phi, t)$ и $D_{mt}^{(a)}(\phi, t)$ вычисляются с помощью уравнения (4.68)

$$D_E^{(a)}(\phi, t) = \frac{1}{\sqrt{M_t}} \exp\left(-2\pi i \frac{mv_y + i\Gamma}{M_t} a\right) \sum_{q=0}^{M_t-1} \exp\left(\frac{2\pi iqa}{M_t}\right) D_E^{(q)}(\phi, t), \quad (4.80)$$

уравнения (4.66), записанного в следующем виде:

$$D_E^{(q)}(\phi, t) = \exp\left(-i(mv_y + i\Gamma)\phi + 2\pi ia \frac{mv_y + i\Gamma}{M}\right) G^{(1)}(\phi, t), \quad (4.81)$$

уравнения (4.75):

$$\begin{aligned}
G^{(1)}(\phi, t) &= -2\sqrt{-i\Omega_m t} \exp\left(2\pi i \frac{mv_y - q}{M_t} - \frac{2\pi\Gamma}{M_t}\right) \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') P_m^{(q)}(\phi', 0) \\
&\times \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left(2\pi i k \left(\frac{mv_y - q}{M_t} + \frac{i\Gamma}{M_t}\right)\right) \frac{J_1\left(2\sqrt{-i\Omega_m t}(k + \Phi)\right)}{\sqrt{k + \Phi}}
\end{aligned} \tag{4.82}$$

и уравнения (4.77)

$$P_m^{(q)}(\phi, 0) = \frac{e^{i(mv_y + i\Gamma)\phi}}{\sqrt{M_t}} \sum_{b=0}^{M_t-1} D_m^{(b)}(\phi, 0) \exp\left(-\frac{2\pi i q b}{M_t} + 2\pi i b \frac{mv_y + i\Gamma}{M_t} \frac{M_g}{M}\right). \tag{4.83}$$

Объединив эти выражения в формуле (4.80), пишем

$$\begin{aligned}
D_E^{(a)}(\phi, t) &= \exp\left(-i(mv_y + i\Gamma)\phi - 2\pi i a \frac{mv_y + i\Gamma}{M} \frac{M_g}{M_t}\right) \\
&\times \frac{1}{\sqrt{M_t}} \sum_{q=0}^{M_t-1} \exp\left(\frac{2\pi i q a}{M_t}\right) G^{(1)}(\phi, t),
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
D_E^{(a)}(\phi, t) &= -\sqrt{-i\Omega_m t} \exp\left(2\pi i \frac{mv_y + i\Gamma}{M_t}\right) \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') e^{i(mv_y + i\Gamma)(\phi' - \phi)} \\
&\times \sum_{b=0}^{M_t-1} D_m^{(b)}(\phi', 0) \exp\left(2\pi i (b - a) \frac{mv_y + i\Gamma}{M_t} \frac{M_g}{M}\right) S_{a,b},
\end{aligned} \tag{4.84}$$

где

$$S_{a,b} = \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left(2\pi i k \frac{mv_y + i\Gamma}{M_t}\right) \frac{J_1\left(2\sqrt{-i\Omega_m t}(k + \Phi)\right)}{\sqrt{k + \Phi}} S_{a,b}^{(k)}, \tag{4.85}$$

а

$$S_{a,b}^{(k)} = \frac{1}{M_t} \sum_{q=0}^{M_t-1} \exp\left(\frac{2\pi i q [a - 1 - b - k]}{M_t}\right) = \delta_{k, a-1-b}. \tag{4.86}$$

По определению, коэффициенты $S_{a,b}^{(k)}$ удовлетворяют условиям периодичности:

$$S_{a,b}^{(k)} = S_{a,b}^{(k+M_t)}, \quad S_{a, M_t-r}^{(k)} = S_{a,-r}^{(k)}. \tag{4.87}$$

Разобьем величину $S_{a,b}$ на две части:

$$S_{a,b} = S_{a,b}^{(st)} + S_{a,b}^{(mt)}. \tag{4.88}$$

Здесь

$$S_{a,b}^{(mt)} = \sum_{k=a}^{\infty} \exp\left(2\pi i k \frac{m\nu_y + i\Gamma}{M_t}\right) \frac{J_1\left(2\sqrt{-i\Omega_m t}(k + \Phi)\right)}{\sqrt{k + \Phi}} S_{a,b}^{(k)}. \quad (4.89)$$

В соответствии с разбиением (4.88) мы будем писать:

$$D_E^{(a)}(\phi, t) = D_{st}^{(a)}(\phi, t) + D_{mt}^{(a)}(\phi, t). \quad (4.90)$$

Подставив $S_{a,b}^{(st)}$ в (4.84) и используя (4.86), находим ($M_g = M - M_t$)

$$\begin{aligned} D_{st}^{(a)}(\phi, t) &= -H_a \sqrt{-i\Omega_m t} \exp\left(-i(m\nu_y + i\Gamma)\left(\phi - \frac{2\pi a}{M}\right)\right) \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') \sum_{b=0}^{a-1} D_m^{(b)}(\phi', 0) \exp\left(i(m\nu_y + i\Gamma)\left(\phi' - \frac{2\pi b}{M}\right)\right) \\ &\times \frac{J_1\left(2\sqrt{-i\Omega_m t}(\Phi_1(\phi, \phi') + a - b)\right)}{\sqrt{\Phi_1(\phi, \phi') + a - b}}, \end{aligned} \quad (4.91)$$

При вычислении $S_{a,b}^{(mt)}$ полезно провести замену $k \rightarrow k - a + 1$. Тогда, повторные вычисления, которые использовались при получении формулы (4.34) приводит к выражению

$$\begin{aligned} D_{mt}^{(a)}(\phi, t) &= -\sqrt{-iM_t\Omega_m t} \exp\left(-i(m\nu_y + i\Gamma)\left(\phi - \frac{2\pi a}{M}\right)\right) \\ &\times \frac{1}{M_t} \sum_{b=0}^{M_t-1} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') D_m^{(b)}(\phi', 0) \exp\left(i(m\nu_y + i\Gamma)\left(\phi' - \frac{2\pi b}{M}\right)\right) \\ &\times \sum_{l=1}^{\infty} \exp(2\pi i l (m\nu_y + i\Gamma)) \frac{J_1\left(2\sqrt{-iM_t\Omega_m t}\left(\frac{\Phi_1(\phi, \phi') + a - b}{M_t} + l\right)\right)}{\sqrt{\frac{\Phi_1(\phi, \phi') + a - b}{M_t} + l}}. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Функции $D_{st}^{(a)}(\phi, t)$ описывают вклады однооборотных связей когерентных колебаний сгустков пучка. Любопытно отметить, что хотя слагаемое $D_{st}^{(a)}(\phi, t)$ появляется в расчетах как одна из частей вкладов собственных мод пучка с частотами, определенными в (4.70), оно в точности совпадает с величиной, которая может быть получена в расчете $D_{st}^{(a)}(\phi, t)$, выполненном в предположении об отсутствии длительного запоминания в электродах наведенных полей.

4.3.2. Эффект прерывания цуга сгустков

Вычислим решения интегральных уравнений (4.37) предполагая, что длительное запоминание наведенных полей электродами отсутствует. Формально, этот случай описывается системой уравнений (4.37), в которых следует положить $\Lambda = 0$. Тогда

вместо (4.37) получаем следующую систему уравнений:

$$P_m^{(a)}(\phi) = \frac{iP_m^{(a)}(\phi, 0)}{\Delta\omega_m} - W_m \int_{\phi}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') P_m^{(a)}(\phi') \quad (4.93)$$

$$- H_a W_m \sum_{b=0}^{a-1} X_b.$$

Преобразованием этих интегральных уравнений в дифференциальные уравнения для $P_m^{(a)}(\phi)$ и использованием для этих дифференциальных уравнений граничных условий $P_m^{(a)}(\infty) = -H_a W_m \sum_{b=0}^{a-1} X_b$ находим

$$P_m^{(a)}(\phi) = \frac{iP_m^{(a)}(\phi, 0)}{\Delta\omega_m} - \frac{iW_m}{\Delta\omega_m} \int_{\phi}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') \quad (4.94)$$

$$\times P_m^{(a)}(\phi', 0) \exp(-W_m N(\phi', \phi))$$

$$- H_a W_m \exp\left(-W_m \int_{\phi}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi')\right) \sum_{b=0}^{a-1} X_b.$$

Интегрируя обе части этого уравнения по ϕ с функцией $\rho_0(\phi)$ и используя определение (4.39), преобразуем уравнения (4.94) в систему алгебраических уравнений для величин X_a :

$$X_a = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \rho_0(\phi) \frac{iP_m^{(a)}(\phi, 0)}{\Delta\omega_m} \quad (4.95)$$

$$- \frac{iW_m}{\Delta\omega_m} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \rho_0(\phi) \int_{\phi}^{\infty} d\phi' P_m^{(a)}(\phi', 0) \rho_0(\phi') \exp(-W_m N(\phi', \phi))$$

$$- H_a W_m \sum_{b=0}^{a-1} X_b \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \rho_0(\phi) \exp\left(-W_m \int_{\phi}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi')\right).$$

Вычисление интеграла в третьем слагаемом этого выражения является достаточно простым:

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \rho_0(\phi) \exp\left(-W_m \int_{\phi}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi')\right) \quad (4.96)$$

$$= \frac{1}{W_m} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \frac{d}{d\phi} \exp\left(-W_m \int_{\phi}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi')\right)$$

$$= \frac{1}{W_m} (1 - e^{-W_m}).$$

Поэтому вместо (4.95) пишем

$$X_a = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \rho_0(\phi) \frac{iP_m^{(a)}(\phi, 0)}{\Delta\omega_m} - \frac{iW_m}{\Delta\omega_m} S_1 - H_a (1 - e^{-W_m}) \sum_{b=0}^{a-1} X_b, \quad (4.97)$$

где

$$S_1 = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \rho_0(\phi) \int_{\phi}^{\infty} d\phi' P_m^{(a)}(\phi', 0) \rho_0(\phi') \exp(-W_m N(\phi', \phi)). \quad (4.98)$$

Простыми вычислениями:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \rho_0(\phi) \exp\left(-W_m \int_{\phi}^{\infty} d\phi'' \rho_0(\phi'')\right) \\
&\times \int_{\phi}^{\infty} d\phi' P_m^{(a)}(\phi', 0) \rho_0(\phi') \exp\left(W_m \int_{\phi'}^{\infty} d\phi'' \rho_0(\phi'')\right) \\
&= \frac{1}{W_m} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \frac{d}{d\phi} \exp\left(-W_m \int_{\phi}^{\infty} d\phi'' \rho_0(\phi'')\right) \\
&\times \int_{\phi}^{\infty} d\phi' P_m^{(a)}(\phi', 0) \rho_0(\phi') \exp\left(W_m \int_{\phi'}^{\infty} d\phi'' \rho_0(\phi'')\right) \\
&= -\frac{e^{-W_m}}{W_m} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' P_m^{(a)}(\phi', 0) \rho_0(\phi') \exp\left(W_m \int_{\phi'}^{\infty} d\phi'' \rho_0(\phi'')\right) \\
&+ \frac{1}{W_m} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi P_m^{(a)}(\phi, 0) \rho_0(\phi)
\end{aligned}$$

– преобразуем (4.97) к виду

$$\begin{aligned}
X_a &= \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \rho_0(\phi) \frac{iP_m^{(a)}(\phi, 0)}{\Delta\omega_m} \\
&+ \frac{ie^{-W_m}}{\Delta\omega_m} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' P_m^{(a)}(\phi', 0) \rho_0(\phi') \exp\left(W_m \int_{\phi'}^{\infty} d\phi'' \rho_0(\phi'')\right) \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \frac{-iP_m^{(a)}(\phi, 0)}{\Delta\omega_m} \rho_0(\phi) - H_a (1 - e^{-W_m}) \sum_{b=0}^{a-1} X_b,
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
X_a &= \frac{i}{\Delta\omega_m} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' P_m^{(a)}(\phi', 0) \rho_0(\phi') e^{-W_m \Phi_2(\phi')} \\
&- H_a (1 - e^{-W_m}) \sum_{b=0}^{a-1} X_b,
\end{aligned} \tag{4.99}$$

где

$$\Phi_2(\phi) = 1 - \int_{\phi}^{\infty} d\phi'' \rho_0(\phi''). \tag{4.100}$$

Определив теперь величины

$$V_a = \frac{i}{\Delta\omega_m} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' P_m^{(a)}(\phi', 0) \rho_0(\phi') e^{-W_m \Phi_2(\phi')}, \tag{4.101}$$

перепишем уравнения (4.99) в следующем виде:

$$X_0 = V_0, \tag{4.102}$$

$$X_a = V_a - (1 - e^{-W_m}) \sum_{b=0}^{a-1} X_b, \quad a = 1, 2, \dots, M_t - 1. \tag{4.103}$$

Величины X_a удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$X_a = V_a - V_{a-1} + e^{-W_m} X_{a-1}, \quad a \geq 1. \tag{4.104}$$

Поэтому решение уравнений (4.103) записывается в виде:

$$X_a = V_a - (1 - e^{-W_m}) \sum_{b=0}^{a-1} \exp(-W_m(a-1-b)) V_b. \quad (4.105)$$

Используя тождество

$$\sum_{b=0}^{a-1} X_b = \sum_{b=0}^{a-1} \exp(-W_m(a-1-b)) V_b, \quad (4.106)$$

получаем

$$\begin{aligned} P_m^{(a)}(\phi, \omega) &= \frac{iP_m^{(a)}(\phi, 0)}{\Delta\omega_m} - \frac{iW_m}{\Delta\omega_m} \int_{\phi}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') \\ &\times P_m^{(a)}(\phi', 0) \exp(-W_m N(\phi', \phi)) - \frac{iW_m}{\Delta\omega_m} \sum_{b=0}^{a-1} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' P_m^{(b)}(\phi', 0) \rho_0(\phi') \exp(-W_m[\Phi + a - 1 - b]). \end{aligned} \quad (4.107)$$

Третье слагаемое в правой части этого выражения описывает эффект прерывания цуга:

$$\delta P_m^{(a)}(\phi, \omega) = \frac{-iW_m}{\Delta\omega_m} \sum_{b=0}^{a-1} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' P_m^{(b)}(\phi', 0) \rho_0(\phi') e^{-W_m[\Phi + a - 1 - b]}. \quad (4.108)$$

Обратным преобразованием Фурье

$$e^{i\omega_m t} \delta P_m^{(a)}(\phi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta\omega_m}{2\pi} e^{-i\Delta\omega_m t} \delta P_m^{(a)}(\phi, \omega) \quad (4.109)$$

и подстановкой (4.36) находим

$$\begin{aligned} \delta D_m^{(a)} &= -H_a \sqrt{-i\Omega_m t} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') \sum_{b=0}^{a-1} D_m^{(b)}(\phi', 0) \\ &\times \exp\left(i(mv_y + i\Gamma) \left(\phi' - \phi + \frac{2\pi(a-b)}{M}\right)\right) \\ &\times \frac{J_1\left(2\sqrt{-i\Omega_m t}(\Phi + a - 1 - b)\right)}{\sqrt{\Phi + a - 1 - b}}, \end{aligned} \quad (4.110)$$

Это выражение в точности совпадает с правой частью в формуле (4.91).

Глава 5

Подавление колебаний разбросами частот

Перейдем к изучению влияния разброса частот колебаний частиц на развитие в сгустке быстрых неустойчивостей поперечных колебаний. Как мы установили, благодаря запоминанию полей, наведенных сгустком в окружающих его электродах, когерентный сигнал сгустка состоит из двух частей. Первая описывает эффекты, связанные с однооборотными возмущениями колебаний сгустка наведенными полями. В условиях подавления продольной подвижности частиц эта часть сигнала в точности соответствует эффекту прерывания пучка. Соответствующие доли амплитуды когерентных колебаний монохроматического сгустка зависят от времени по квазиэкспоненциальному закону. Так, если τ – время развития неустойчивости, то амплитуды увеличиваются пропорционально, например, множителю $\exp(\sqrt{t/\tau})$. Вторая часть сигнала описывает многооборотные эффекты, которые появляются благодаря запоминанию наведенных полей. Вследствие этого у когерентных колебаний сгустка появляются собственные моды и собственные частоты, а результатом их сложения является самосогласованная часть когерентного сигнала. Хотя амплитуды мод колебаний сами по себе экспоненциально зависят от времени, их суммы, вычисленные для монохроматических сгустков, могут зависеть от времени по неэкспоненциальным законам, которые характерны для эффекта прерывания пучка. Такая возможность появляется в тех случаях, когда спектры когерентных колебаний не содержат лидирующих мод. Вклады самосогласованной части когерентных колебаний в полный когерентный сигнал сгустка пропорциональны фактору запоминания наведенных полей $\exp(-2\pi\Gamma)$ и могут стать малыми при короткой памяти в системе.

Влияние разброса частот бетатронных колебаний частиц различно для самосогласованной и несамосогласованной частей когерентного сигнала сгустка. В первом случае разброс частот изменяет дисперсионные уравнения мод за счет их затухания Ландау. В результате появляются пороги неустойчивости мод колебаний. Во втором случае собственных мод нет и потому затухание Ландау отсутствует. В соответствии с этим отсутствуют и пороги неустойчивости для этой части колебаний. Такие колебания сгустка затухают благодаря расфазировке когерентных колебаний разбросом частот бетатронных колебаний.

5.1. Фурье-амплитуды дипольных моментов

Как и в предыдущей главе, мы упростим вычисления, предположив, что сгусток совершает дипольные бетатронные колебания в вертикальной плоскости, а энергии всех частиц сгустка совпадают. Состояния пучка без когерентных колебаний будет описываться функцией распределения:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \delta(\Delta p) G(I) \rho_0(\phi). \quad (5.1)$$

Некогерентные колебания частиц будут описываться формулами

$$y = \sqrt{\frac{R_0 I}{p v_y}} \cos \psi, \quad p_y = -\sqrt{\frac{p v_y I}{R_0}} \sin \psi, \quad (5.2)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_y, \quad \theta = \omega_0 t + \phi.$$

Мы предполагаем, что разброс частот бетатронных колебаний частиц обеспечивается кубической нелинейностью фокусирующих полей накопителя. Для простоты примем, что

$$\omega_y(I) = \omega_0 v_y + \omega_0 A I. \quad (5.3)$$

Также мы примем, что функции распределения $G(I)$ и $\rho_0(\phi)$ удовлетворяют следующим условиям нормировки:

$$\int_0^\infty dI G(I) = 1, \quad \int_{-\infty}^\infty d\phi \rho_0(\phi) = 1. \quad (5.4)$$

Кроме того, мы продолжим описание поперечных наведенных сгустком пучка с использованием широкополосного поперечного импеданса связи, определенного формулой (3.20). Тогда уравнение (3.9) записывается в виде

$$f_m(I, \phi, \omega) = \frac{i f_m^{(0)}(I, \phi)}{\omega - m \omega_y} + m \rho_0(\phi) \frac{dG/dI}{\omega - m \omega_y} \sqrt{\frac{R_0 I}{2 p v_y}} \overline{F_y(\omega)}, \quad (5.5)$$

где $f_m^{(0)}(I, \phi)$ – начальное значение гармоники функции распределения,

$$\overline{F_y(\omega)} = \frac{i N e^2 c Z_0}{\text{Пб}_\perp^2} \sum_{n=-\infty}^\infty \frac{e^{in\phi}}{(m v_y + n + i\Gamma)} \int_{-\infty}^\infty \frac{d\phi'}{2\pi} D_m(\phi', \omega) e^{-in\phi'}, \quad (5.6)$$

а

$$D_m(\phi, \omega) = \sqrt{\frac{R_0}{2 p v_y}} \int dI' \sqrt{I'} f_m(I', \phi, \omega) \quad (5.7)$$

– Фурье-амплитуда дипольного момента пучка, которая соответствует гармонике $f_m(I, \phi, \omega)$. Как и прежде, выражение (5.6) описывает запоминание наведенных полей электродами. За период обращения частиц в машине амплитуда остаточных полей уменьшается в $\exp(-2\pi\Gamma)$ раз. После подстановки этих выражений в уравнение

(5.5), получаем

$$f_m = \frac{if_m^{(0)}(I, \phi)}{\Delta\omega_m - \delta\omega_m} + i \frac{\rho_0(\phi) (\partial G/\partial I)}{\Delta\omega_m - \delta\omega_m} \sqrt{\frac{R_0 I}{2p\nu_y}} \frac{mNe^2cZ_0}{\text{П}b_{\perp}^2} \\ \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in\phi}}{m\nu_y + n + i\Gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\phi'}{2\pi} D_m(\phi', \omega) e^{-in\phi'},$$

или, используя определение (5.7),

$$D_m(\phi, \omega) = D_m^{(0)}(\phi, \omega) - iW_m \rho_0(\phi) \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' S(\phi - \phi') D_m(\phi', \omega) e^{-in\phi'}. \quad (5.8)$$

Здесь

$$S(\phi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in\phi}}{n + m\nu_y + i\Gamma} = -ie^{-(im\nu_y + i\Gamma)\phi} [H(-\phi) + \Lambda_m], \quad (5.9)$$

$H(\phi)$ – ступенчатая функция Хэвисайда ($H(\phi < 0) = 0$, а $H(\phi \geq 0) = 1$),

$$\Lambda_m = \frac{\exp(2\pi i (m\nu_y + i\Gamma))}{1 - \exp(2\pi i (m\nu_y + i\Gamma))}, \quad (5.10)$$

а

$$D_m^{(0)}(\phi, \omega) = i \sqrt{\frac{R_0}{2p\nu_y}} \int_0^{\infty} dI \frac{\sqrt{I} f_m^{(0)}(I, \phi)}{\Delta\omega_m - \delta\omega_m} \quad (5.11)$$

– Фурье-амплитуда начального значения дипольного момента сгустка. Здесь $\Delta\omega_m = \omega - m\omega_0\nu_y$, $\delta\omega_m = m\omega_0 AI$ – разброс частот бетатронных колебаний в сгустке (если положить $m = 1$),

$$W_m = -\Omega_m \int_0^{\infty} dI \frac{I (\partial G/\partial I)}{\Delta\omega_m - \delta\omega_m(I)}, \quad \text{Im}\Delta\omega_m > 0, \quad (5.12)$$

где

$$\Omega_m = \frac{mNe^2cZ_0}{4\pi p\nu_y b_{\perp}^2}. \quad (5.13)$$

Напомним, что величина $\Omega_m/2$ определяет однооборотную часть когерентного сдвига частоты монохроматического сгустка ($\delta\omega_m = 0$) нулевой длины.

5.1.1. Решение уравнения (5.8)

Воспользуемся подстановкой

$$D_m(\phi, \omega) = D_m^{(0)}(\phi, \omega) - iW_m \rho_0(\phi) \chi_m(\phi). \quad (5.14)$$

Подставив это выражение в (5.8), находим, что новая неизвестная функция $\chi_m(\phi)$ удовлетворяет интегральному уравнению:

$$\chi_m(\phi) = \chi_m^{(0)}(\phi) - W_m \int_{\phi}^{\infty} d\phi' e^{i(m\nu_y + i\Gamma)(\phi' - \phi)} \rho_0(\phi') \chi_m(\phi') \\ - W_m \Lambda_m \int_{-\infty}^{\phi} d\phi' e^{i(m\nu_y + i\Gamma)(\phi' - \phi)} \rho_0(\phi') \chi_m(\phi'), \quad (5.15)$$

где

$$\begin{aligned} \chi_m^{(0)}(\phi) = & -i \int_{\phi}^{\infty} d\phi' e^{i(mv_y + i\Gamma)(\phi' - \phi)} D_m^{(0)}(\phi', \omega) \\ & - i\Lambda_m \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' e^{i(mv_y + i\Gamma)(\phi' - \phi)} D_m^{(0)}(\phi', \omega). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Определив функции

$$p_m(\phi) = \chi(\phi, \omega) e^{i(mv_y + i\Gamma)\phi}, \quad p_m^{(0)}(\phi) = \chi_m^{(0)}(\phi) e^{i(mv_y + i\Gamma)\phi}, \quad (5.17)$$

преобразуем (5.15) к следующему виду:

$$p_m(\phi) = p_m^{(0)}(\phi) - W_m \int_{\phi}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') p_m(\phi') - W_m \Lambda_m C_m, \quad (5.18)$$

где

$$C_m = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') p_m(\phi'). \quad (5.19)$$

Уравнение (5.18) подобно уравнению (3.56), которое мы уже решали и установили, что его решение описывается формулой (3.68). Поэтому пишем

$$\begin{aligned} p_m = & p_m^{(0)}(\phi) - \frac{W_m B}{(1 - B e^{-W_m})} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') p_m^{(0)}(\phi') \exp(-W_m \Phi) \\ & - W_m \int_{\phi}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') p_m^{(0)}(\phi') \exp(-W_m N(\phi', \phi)), \end{aligned} \quad (5.20)$$

или, используя (5.17),

$$\chi(\phi, \omega) = \chi_m^{(0)}(\phi) - \frac{W_m B}{(1 - B e^{-W_m})} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') \chi_m^{(0)}(\phi') e^{G_1(\phi, \phi')} + K(\phi), \quad (5.21)$$

где

$$K(\phi) = -W_m \int_{\phi}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') \chi_m^{(0)}(\phi') e^{G_2(\phi, \phi')} \quad (5.22)$$

а

$$G_1(\phi, \phi') = i(mv_y + i\Gamma)(\phi' - \phi) - W_m \Phi(\phi, \phi'), \quad (5.23)$$

$$G_2(\phi, \phi') = i(mv_y + i\Gamma)(\phi' - \phi) - W_m N(\phi', \phi), \quad (5.24)$$

величина B определена формулой (3.64):

$$B = \frac{\Lambda_m}{1 + \Lambda_m} = \exp(2\pi i(mv_y + i\Gamma)). \quad (5.25)$$

Поскольку

$$\Phi(\phi, \phi') = 1 + N(\phi', \phi), \quad (5.26)$$

ядра $G_1(\phi, \phi')$ и $G_2(\phi, \phi')$ связаны соотношением

$$G_1(\phi, \phi') = G_2(\phi, \phi') - W_m. \quad (5.27)$$

Замечая, что

$$\begin{aligned}
K &= \int_{\phi}^{\infty} d\phi' \chi_m^{(0)}(\phi') e^{i(m\nu_y + i\Gamma)(\phi' - \phi)} \frac{d}{d\phi'} [\exp(-W_m N(\phi', \phi))] \\
&= \lim_{\phi' \rightarrow \infty} \left(\chi_m^{(0)}(\phi') e^{G_2(\phi, \phi')} \right) - \chi_m^{(0)}(\phi) - \int_{\phi}^{\infty} d\phi' \frac{d\chi_m^{(0)}(\phi')}{d\phi'} e^{G_2(\phi, \phi')} \\
&\quad - i(m\nu_y + i\Gamma) \int_{\phi}^{\infty} d\phi' \chi_m^{(0)}(\phi') e^{G_2(\phi, \phi')}
\end{aligned}$$

и подставляя в эти формулы тождества

$$\frac{d\chi_m^{(0)}}{d\phi} = iD_m^{(0)}(\phi, \omega) - i(m\nu_y + i\Gamma) \chi_m^{(0)}(\phi) \quad (5.28)$$

и в силу (5.16)

$$\lim_{\phi' \rightarrow \infty} \left(e^{i(m\nu_y + i\Gamma)\phi'} \chi_m^{(0)}(\phi') \right) = -i\Lambda_m \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' D_m^{(0)}(\phi', \omega) e^{i(m\nu_y + i\Gamma)\phi'}, \quad (5.29)$$

находим

$$\begin{aligned}
K &= -\chi_m^{(0)}(\phi) - i \int_{\phi}^{\infty} d\phi' D_m^{(0)}(\phi', \omega) e^{G_2(\phi, \phi')} \\
&\quad - i\Lambda_m e^{-W_m \int_{\phi}^{\infty} d\phi'' \rho_0(\phi'')} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' D_m^{(0)}(\phi', \omega) e^{i(m\nu_y + i\Gamma)(\phi' - \phi)} \\
&\quad + i(m\nu_y + i\Gamma) \int_{\phi}^{\infty} d\phi' \chi_m^{(0)}(\phi') e^{G_2(\phi, \phi')} \\
&\quad - i(m\nu_y + i\Gamma) \int_{\phi}^{\infty} d\phi' \chi_m^{(0)}(\phi') e^{G_2(\phi, \phi')}.
\end{aligned}$$

После очевидных сокращений и подстановки этого выражения в уравнение (5.21) получаем

$$\begin{aligned}
\chi(\phi, \omega) &= -i \int_{\phi}^{\infty} d\phi' D_m^{(0)}(\phi', \omega) e^{G_2(\phi, \phi')} \quad (5.30) \\
&- i\Lambda_m \exp\left(-W_m \int_{\phi}^{\infty} d\phi'' \rho_0(\phi'')\right) \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' D_m^{(0)}(\phi', \omega) e^{i(m\nu_y + i\Gamma)(\phi' - \phi)} \\
&\quad + \frac{BK_1(\phi)}{(1 - Be^{-W_m})}.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
K_1(\phi) &= -W_m \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi') \chi_m^{(0)}(\phi') e^{G_1(\phi, \phi')} \quad (5.31) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' \chi_m^{(0)}(\phi') e^{i(m\nu_y + i\Gamma)(\phi' - \phi)} \frac{d}{d\phi'} [\exp(-W_m N(\phi', \phi))].
\end{aligned}$$

Интегрируя по ϕ' по частям, пишем

$$\begin{aligned}
K_1 &= \lim_{\phi' \rightarrow \infty} \left(\chi_m^{(0)}(\phi') e^{G_1(\phi, \phi')} \right) - \lim_{\phi' \rightarrow -\infty} \left(\chi_m^{(0)}(\phi') e^{G_1(\phi, \phi')} \right) \\
&\quad - \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' e^{G_1(\phi, \phi')} \frac{d}{d\phi'} \chi_m^{(0)}(\phi') - i(m\nu_y + i\Gamma) \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' \chi_m^{(0)}(\phi') e^{G_1(\phi, \phi')}.
\end{aligned}$$

Воспользовавшись тождествами (5.29),

$$\lim_{\phi' \rightarrow \infty} \exp(-W_m \Phi(\phi, \phi')) = \exp\left(-W_m \int_{\phi}^{\infty} d\phi'' \rho_0(\phi'') - W_m\right),$$

а также

$$\begin{aligned} & \lim_{\phi' \rightarrow -\infty} e^{i(mv_y + i\Gamma)\phi'} \chi_m^{(0)}(\phi') = \\ & = -i(1 + \Lambda_m) \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' D_m^{(0)}(\phi', \omega) e^{i(mv_y + i\Gamma)\phi'} \end{aligned}$$

и

$$\lim_{\phi' \rightarrow -\infty} \exp(-W_m \Phi) = \exp\left(-W_m \int_{\phi}^{\infty} d\phi'' \rho_0(\phi'')\right),$$

преобразуем функцию K_1 к виду

$$\begin{aligned} K_1 &= i(1 + \Lambda_m) (1 - Be^{-W_m}) \exp\left(-W_m \int_{\phi}^{\infty} d\phi'' \rho_0(\phi'')\right) \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' \exp(i(mv_y + i\Gamma)(\phi' - \phi)) D_m^{(0)}(\phi', \omega) \\ & - i \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' D_m^{(0)}(\phi', \omega) e^{G_1(\phi, \phi')} \\ & + i(mv_y + i\Gamma) \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' \chi_m^{(0)}(\phi') e^{G_1(\phi, \phi')} \\ & - i(mv_y + i\Gamma) \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' \chi_m^{(0)}(\phi') e^{G_1(\phi, \phi')}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} K_1 &= i(1 + \Lambda_m) (1 - Be^{-W_m}) \exp\left(-W_m \int_{\phi}^{\infty} d\phi'' \rho_0(\phi'')\right) \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' D_m^{(0)}(\phi', \omega) \exp(i(mv_y + i\Gamma)(\phi' - \phi)) \\ & - i \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' D_m^{(0)}(\phi', \omega) e^{G_1(\phi, \phi')}. \end{aligned}$$

Возвращаясь к выражению (5.30), получаем

$$\begin{aligned} \chi(\phi, \omega) &= -i\Lambda_m \exp\left(-W_m \int_{\phi}^{\infty} d\phi'' \rho_0(\phi'')\right) \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' D_m^{(0)}(\phi', \omega) \exp(i(mv_y + i\Gamma)(\phi' - \phi)) \\ & + \frac{iB(1 + \Lambda_m)}{(1 - Be^{-W_m})} (1 - Be^{-W_m}) \exp\left(-W_m \int_{\phi}^{\infty} d\phi'' \rho_0(\phi'')\right) \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' D_m^{(0)}(\phi', \omega) \exp(i(mv_y + i\Gamma)(\phi' - \phi)) \\ & - \frac{iB}{(1 - Be^{-W_m})} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' D_m^{(0)}(\phi', \omega) e^{G_1(\phi, \phi')} \\ & - i \int_{\phi}^{\infty} d\phi' D_m^{(0)}(\phi', \omega) e^{G_2(\phi, \phi')}, \end{aligned}$$

или, учитывая формулу (5.25) и приводя подобные члены,

$$\begin{aligned} \chi(\phi, \omega) &= \frac{-iB}{(1 - Be^{-W_m})} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' D_m^{(0)}(\phi', \omega) e^{G_1(\phi, \phi')} \\ & - i \int_{\phi}^{\infty} d\phi' D_m^{(0)}(\phi', \omega) e^{G_2(\phi, \phi')}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Подставив это выражение в (5.14), получаем

$$D_m(\phi, \omega) = D_m^{(0)}(\phi, \omega) - W_m \rho_0(\phi) \int_{\phi}^{\infty} d\phi' D_m^{(0)}(\phi', \omega) e^{G_2(\phi, \phi')} \quad (5.33)$$

$$- \frac{W_m \rho_0(\phi) B}{(1 - B e^{-W_m})} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' D_m^{(0)}(\phi', \omega) e^{G_1(\phi, \phi')}.$$

5.1.2. Дисперсионные уравнения

Для сгустков с гладкими и несингулярными функциями распределения по частотам колебаний первые два члена в правой части (5.33) не имеют полюсных особенностей во всей плоскости комплексной переменной $\Delta\omega_m$. Эти два слагаемых описывают расфазировку сгустка после его начального удара, а также влияние эффекта прерывания пучка на его расфазировку. Третье слагаемое в (5.33) описывает появление коллективных мод сгустка из-за запоминания наведенных полей электродами. Как функция комплексной переменной $\Delta\omega_m$, это слагаемое имеет простые полюсы в точках $\Delta\omega_m$, которые являются корнями дисперсионного уравнения:

$$1 - B e^{-W_m(\Delta\omega_m)} = 0. \quad (5.34)$$

Разрешая (5.34) относительно $W_m(\Delta\omega_m)$ и учитывая формулы (5.12) и (5.25), перепишем дисперсионное уравнение в виде

$$1 = - \frac{\Omega_m}{2\pi i (m v_y + k) - 2\pi\Gamma} \int_0^{\infty} dI \frac{I (dG/dI)}{\Delta\omega_{m,k} - \delta\omega_m(I)}, \quad \text{Im}\Delta\omega_{m,k} > 0. \quad (5.35)$$

Здесь целые числа $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ задают номера коллективных мод сгустка. Для устойчивых мод ($\text{Im}\Delta\omega_{m,k} < 0$) правые части в формуле (5.12) и в уравнении (5.35) должны получаться аналитическим продолжением выписанных выражений в нижнюю полуплоскость комплексной переменной $\Delta\omega_m$. Напомним, что условие устойчивости мод монохроматического пучка ($\delta\omega_m(I) = 0$) записывается в виде неравенства $m(m v_y + k) > 0$. Для сгустков с гладкими функциями распределения по амплитудам бетатронных колебаний частиц неустойчивые моды могут стабилизироваться затуханием Ландау. Именно, моды с номерами k оказываются устойчивыми, если их комплексные когерентные сдвиги частоты

$$\Omega_{m,k} = \frac{\Omega_m}{2\pi i (m v_y + k) - 2\pi\Gamma} \quad (5.36)$$

оказываются внутри области устойчивости колебаний (например, в [2]). Так, для сгустка с функцией распределения

$$G(I) = \frac{1}{I_0} \exp\left(-\frac{I}{I_0}\right) \quad (5.37)$$

уравнение границы области устойчивости коллективных мод записывается в виде

$$1 = \zeta_{m,k} \int_0^{\infty} \frac{x e^{-x}}{z_m - g_m x + i0} dx, \quad m = \pm 1, \quad (5.38)$$

где $\zeta_{m,k} = \Omega_{m,k}/\delta_y$, $\delta_y = \omega_0 |A| I_0$ – разброс частот бетатронных колебаний частиц, $g_m = mA/|A|$, а параметр $z_m = \Delta\omega_m/\delta_y$ изменяется вдоль действительной оси. Такая граница области устойчивости мод приведена на рис. 4 (сплошная линия). На этом рисунке также изображено положение собственных частот мод монохроматического сгустка. Заполненные окружности изображают собственные частоты ($\zeta_{m,k}$) для

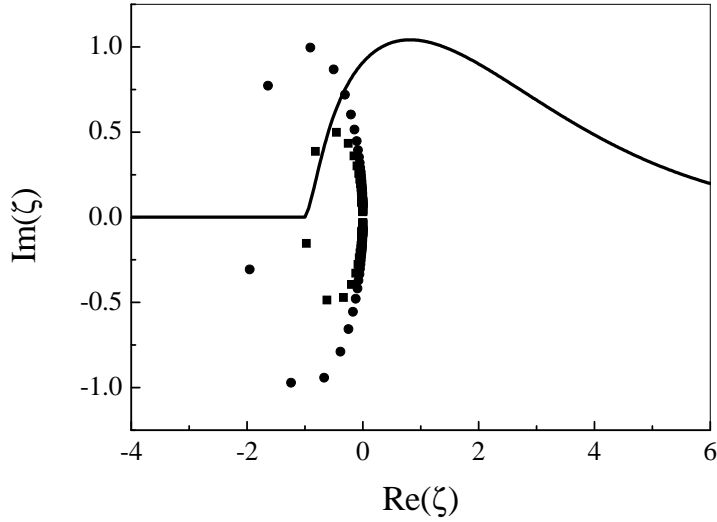


Рис. 4. Граница области устойчивости для экспоненциального распределения переменной действие вертикальных бетатронных колебаний частиц (сплошная линия) и положения частот коллективных мод монохроматического сгустка (заполненные окружности и квадраты). Когерентные колебания устойчивы ниже граничной кривой, $m = 1$, $2\pi\Gamma = 10$, $\Omega_m/\delta_y = 20$ (окружности) и $=10$ (квадраты), $A > 0$.

$\zeta_m = \Omega_m/(m\delta_y) = 20$, а заполненные квадраты – для $\zeta_m = 10$. В этом примере приведенные сгустком поля довольно быстро затухают ($2\pi\Gamma = 10$). По этой причине максимальные значения инкрементов ($\Omega_m/(4\pi\Gamma)$) не очень велики. Для $\zeta_m = 10$ частоты мод лишь приближаются к границе устойчивости (рис. 4). Для области параметров, где $\zeta_m = 20$, число неустойчивых мод заметно больше. Если величина A оказывается отрицательной, то кривая границы области устойчивости отражается относительно оси $\text{Im}\zeta$. В таком случае моды, бывшие неустойчивыми для $A > 0$, могут оказаться внутри области устойчивости когерентных колебаний (рис. 5). Отметим, что с уменьшением параметра памяти $2\pi\Gamma$ число неустойчивых мод увеличивается.

Согласно уравнениям (5.35) или (5.38) приближение монохроматического сгустка хорошо описывает его когерентные колебания в области, где $|\zeta_{m,k}| \gg 1$. В обратной области параметров ($|\zeta_{m,k}| \ll 1$) коллективные моды затухают за счет затухания Ландау с декрементами, пропорциональными разбросу частот бетатронных колебаний в сгустке. Поскольку величины $|\zeta_{m,k}|$ уменьшаются с ростом номера моды k , для сгустков с конечной величиной разброса частот устойчивые моды колебаний могут находиться и в тех областях параметров, где отношения $\zeta_m = \Omega_m/\delta_y$ велики. Это обстоятельство уменьшает число неустойчивых мод в когерентном сигнале немонахроматического сгустка по сравнению с монохроматическим.

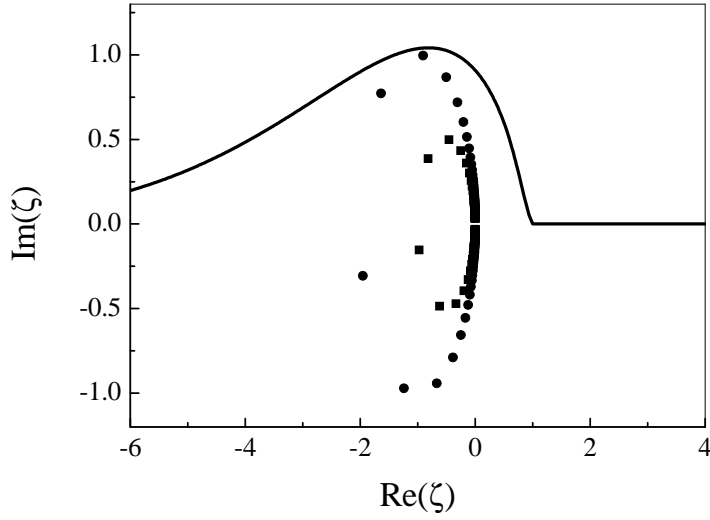


Рис. 5. То же, что и на рис. 4, но для $A < 0$

5.2. Влияние разброса частот на зависимости амплитуд от времени

После вычисления Фурье-амплитуд $D_m(\phi, \Delta\omega_m)$ зависимости когерентных сигналов от времени находятся выполнением обратного преобразования Фурье:

$$e^{im\omega_0 v_y t} D_m(\phi, t) = \int_C \frac{d\Delta\omega_m}{2\pi} e^{-i\Delta\omega_m t} D_m(\phi, \Delta\omega_m), \quad \text{Im}\Delta\omega_m > 0. \quad (5.39)$$

Как и прежде, контур интегрирования C в этом выражении идет из точки $\Delta\omega_m = -\infty$ в точку $\Delta\omega_m = \infty$ параллельно оси $\text{Re}\Delta\omega_m$ и выше всех особенностей подынтегрального выражения. Для сгустков с гладкими распределениями частот колебаний подынтегральное выражение в формуле (5.39) является более сложной функцией $\Delta\omega_m$, чем те, которые нам встречались при решении похожих задач в предыдущей главе. По этой причине для получения большинства результатов в этой главе приходится пользоваться численными методами. Мы упростим вычисления интеграла в (5.39), предположив, что $G(I)$ определяется формулой (5.37). Тогда, например, функция $W_m(\Delta\omega_m)$ записывается в виде

$$W_m = \xi_m \int_0^\infty \frac{ye^{-y}}{z_m - g_m y} dy, \quad \text{Im}z_m > 0, \quad m = \pm 1. \quad (5.40)$$

Для монохроматического сгустка ($\delta_y = 0$) эта функция имела бы полюс в точке $\Delta\omega_m = 0$. Для сгустка с конечным разбросом частот ($\delta_y \neq 0$) функция $W_m(\Delta\omega_m)$ является аналитической в плоскости комплексной переменной $\Delta\omega_m$ с разрезом вдоль реальной полуоси $\Delta\omega_m \geq 0$ ($g_m > 0$) или вдоль реальной полуоси $\Delta\omega_m \leq 0$, если $g_m < 0$. Для конкретизации расчетов мы предположим, что начальные когерентные колебания сгустка возбуждены слабым поперечным ударом в вертикальном направлении и что амплитуда этого удара одинакова для всех частиц сгустка. По этой причине мы будем писать

$$f_m^{(0)}(I, \phi) = R_m \frac{\sqrt{I} e^{-I/I_0}}{I_0} \rho_0(\phi), \quad (5.41)$$

где множитель R_m пропорционален величине удара сгустка. Подставив это выражение в (5.11), находим

$$D_m^{(0)}(\phi, \omega) = i\rho_0(\phi)D_m^{(0)} \int_0^\infty \frac{ye^{-y}}{\Delta\omega_m - g_m\delta_y y} dy = i\rho_0(\phi)D_m^{(0)} \frac{W_m}{\Omega_m}, \quad (5.42)$$

где

$$D_m^{(0)} = R_m \sqrt{\frac{R_0 I_0}{2p\nu_y}}. \quad (5.43)$$

Определим вспомогательную величину

$$d_m(\Delta\omega_m) = -i\Omega_m \frac{D_m(\phi, \omega)}{\rho_0(\phi)D_m^{(0)}} \quad (5.44)$$

или, используя (5.33),

$$\begin{aligned} d_m &= W_m - W_m^2 \int_\phi^\infty d\phi' \rho_0(\phi') e^{G_2(\phi, \phi')} \\ &\quad - \frac{W_m^2 B}{(1 - Be^{-W_m})} \int_{-\infty}^\infty d\phi' \rho_0(\phi') e^{G_1(\phi, \phi')}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Эти определения позволяют переписать формулу (5.39) в следующем виде:

$$e^{im\omega_0\nu_y t} D_m(\phi, t) = \frac{\rho_0(\phi)D_m^{(0)}}{\Omega_m} \int_C \frac{d\Delta\omega_m}{-2\pi i} e^{-i\Delta\omega_m t} d_m(\Delta\omega_m). \quad (5.46)$$

Подставив сюда (5.45), пишем

$$X_m(\phi, t) = \frac{e^{im\omega_0\nu_y t} D_m(\phi, t)}{\rho_0(\phi)D_m^{(0)}} = X_m^{(0)} + E_m(\phi, t) + P_m(\phi, t), \quad (5.47)$$

где

$$\begin{aligned} X_m^{(0)}(\phi, t) &= \int_{-\infty}^\infty \frac{d\Delta\omega_m}{-2\pi i} e^{-i\Delta\omega_m t} \int_0^\infty \frac{ye^{-y}}{\Delta\omega_m - g_m\delta_y y} dy \\ &= \frac{1}{(1 + ig_m\delta_y t)^2}, \end{aligned} \quad (5.48)$$

$$E_m(\phi, t) = \frac{1}{\Omega_m} \int_C \frac{d\Delta\omega_m}{2\pi i} e^{-i\Delta\omega_m t} W_m^2(\Delta\omega_m) \int_\phi^\infty d\phi' \rho_0(\phi') e^{G_2(\phi, \phi')}, \quad (5.49)$$

а

$$P_m(\phi, t) = \frac{B}{\Omega_m} \int_C \frac{d\Delta\omega_m}{2\pi i} \frac{e^{-i\Delta\omega_m t} W_m^2(\Delta\omega_m)}{(1 - Be^{-W_m})} \int_{-\infty}^\infty d\phi' \rho_0(\phi') e^{G_1(\phi, \phi')}. \quad (5.50)$$

В этих уравнениях слагаемое $X_m^{(0)}(\phi, t)$ описывает расфазировку сгустка малой интенсивности после его начального удара в вертикальном направлении, слагаемое $E(\phi, t)$ описывает влияние эффекта прерывания сгустка на эту расфазировку, а слагаемое $P(\phi, t)$ описывает влияние коллективных мод на дипольный когерентный сигнал сгустка. Для еще большего упрощения вычислений мы примем, что линейная плотность сгустка определяется ступенчатой функцией

$$\rho_0(\phi) = \frac{1}{2\Delta} \begin{cases} 1, & |\phi| \leq \Delta, \\ 0, & |\phi| > \Delta, \end{cases} \quad (5.51)$$

где 2Δ – длина сгустка. Для сгустка с такой линейной плотностью фактор $\Phi(\phi, \phi')$ записывается в виде

$$\Phi = 1 + \frac{\phi' - \phi}{2\Delta},$$

а формула (5.45) переходит в следующую:

$$\begin{aligned} d_m(\phi, \Delta\omega_m) &= W_m \tag{5.52} \\ &- \frac{Be^{-W_m}}{(1 - Be^{-W_m})} \frac{W_m^2}{2} \exp\left(-i(mv_y + i\Gamma)\phi + \frac{W_m\phi}{2\Delta}\right) \\ &\quad \times \int_{-1}^1 dx \exp\left(i(mv_y + i\Gamma)x\Delta - \frac{W_mx}{2}\right) \\ &\quad - \frac{W_m^2}{2} \exp\left(-i(mv_y + i\Gamma)\phi + \frac{W_m\phi}{2\Delta}\right) \\ &\quad \times \int_{\frac{\phi}{\Delta}}^1 dx \exp\left(i(mv_y + i\Gamma)x\Delta - \frac{W_mx}{2}\right). \end{aligned}$$

Вычисление интеграла по x в, например, третьем слагаемом в правой части (5.52) приводит к выражению

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{\frac{\phi}{\Delta}}^1 \exp\left(i(mv_y + i\Gamma)\Delta\left(x - \frac{\phi}{\Delta}\right) - \frac{W_m}{2}\left(x - \frac{\phi}{\Delta}\right)\right) dx \\ &= \frac{1 - \exp\left(-\left(1 - \frac{\phi}{\Delta}\right)\left(-i\Delta mv_y + \Delta\Gamma + \frac{W_m}{2}\right)\right)}{-i\Delta mv_y + \Delta\Gamma + \frac{W_m}{2}} \\ &\simeq \frac{1 - \exp\left(-\left(1 - \frac{\phi}{\Delta}\right)\left(\Gamma\Delta + \frac{W_m}{2}\right)\right)}{\Gamma\Delta + \frac{W_m}{2}}, \quad \Delta|mv_y \ll 1. \end{aligned}$$

Если, к тому же, выполнено неравенство $\Gamma\Delta \ll 1$, то последняя формула еще больше упрощается и может быть записана в виде

$$S_2 \simeq \frac{2}{W_m} \left[1 - \exp\left(-\left(1 - \frac{\phi}{\Delta}\right)\frac{W_m}{2}\right) \right], \quad \Delta|mv_y \ll 1, \quad \Gamma\Delta \ll 1. \tag{5.53}$$

В том же приближении интегрирование по x во втором слагаемом в правой части (5.52) приводит к результату

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-1}^1 \exp\left(i(mv_y + i\Gamma)\Delta\left(x - \frac{\phi}{\Delta}\right) - \frac{W_m}{2}\left(x - \frac{\phi}{\Delta}\right)\right) dx \tag{5.54} \\ &\simeq \frac{2}{W_m} \left[\exp\left(\left(1 + \frac{\phi}{\Delta}\right)\frac{W_m}{2}\right) - \exp\left(-\left(1 - \frac{\phi}{\Delta}\right)\frac{W_m}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, для коротких сгустков ($|mv_y\Delta \ll 1$, $\Gamma\Delta \ll 1$) амплитуды $d_m(\phi, \Delta\omega_m)$ определяются формулой

$$\begin{aligned} d_m(\phi, \Delta\omega_m) &= W_m - W_m \left[1 - \exp\left(-\left(1 - \frac{\phi}{\Delta}\right)\frac{W_m}{2}\right) \right] \tag{5.55} \\ &- \frac{Be^{-W_m}}{(1 - Be^{-W_m})} W_m \left[\exp\left(\left(1 + \frac{\phi}{\Delta}\right)\frac{W_m}{2}\right) - \exp\left(-\left(1 - \frac{\phi}{\Delta}\right)\frac{W_m}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

После подстановки этого выражения в (5.46) получаем

$$E_m(\phi, t) = \frac{1}{\Omega_m} \int_C \frac{d\Delta\omega_m}{2\pi i} e^{-i\Delta\omega_m t} W_m \left(1 - \exp \left(- \left(1 - \frac{\phi}{\Delta} \right) \frac{W_m}{2} \right) \right) \quad (5.56)$$

и

$$P_m(\phi, t) = \frac{B}{\Omega_m} \int_C \frac{d\Delta\omega_m}{2\pi i} \frac{e^{-i\Delta\omega_m t - W_m} W_m}{(1 - B e^{-W_m})} \times \left(\exp \left(\left(1 + \frac{\phi}{\Delta} \right) \frac{W_m}{2} \right) - \exp \left(- \left(1 - \frac{\phi}{\Delta} \right) \frac{W_m}{2} \right) \right). \quad (5.57)$$

Видно, что для головных частиц сгустка ($\phi = \Delta$) однооборотное слагаемое $E_m(\phi, t)$ не дает вклада в когерентный сигнал (X_m). Вклады хвостовых частиц сгустка ($\phi = -\Delta$) в X_m определяются выражениями

$$E_m(\phi = -\Delta, t) = \frac{1}{\Omega_m} \int_C \frac{d\Delta\omega_m}{2\pi i} e^{-i\Delta\omega_m t} W_m (1 - e^{-W_m}), \quad (5.58)$$

$$P_m(\phi = -\Delta, t) = \frac{1}{\Omega_m} \int_C \frac{d\Delta\omega_m}{2\pi i} e^{-i\Delta\omega_m t} \frac{B e^{-W_m}}{(1 - B e^{-W_m})} W_m (1 - e^{-W_m}). \quad (5.59)$$

Они показывают, что эффект прерывания сгустка может доминировать в когерентном сигнале, если запоминание наведенных полей достаточно слабо ($|B| \ll 1$). В последнем случае амплитуда когерентного сигнала сгустка резко меняется вдоль его длины.

Во всех этих формулах контур интегрирования проводится в плоскости комплексной переменной $\Delta\omega_m$ выше инкремента наиболее неустойчивой моды. Для частных значений ζ_m положения таких контуров находились изменением $\Delta\omega_m$ параллельно оси $\text{Re}(\Delta\omega_m)$, построением годографа функции $1 - B e^{-W_m}$ и поиском такого годографа, который не окружает начало координат плоскости $\Delta\omega_m$. Например, для комбинации параметров $\zeta_m = 20$ и $2\pi\Gamma = 10$ пунктирная линия на рис. 6 ($\text{Im}\Delta\omega_m = 0.25 \times |\Omega_m|$) окружает начало координат плоскости $\Delta\omega_m$ один раз. Это означает, что один из корней дисперсионного уравнения $1 = B e^{-W_m}$ имеет мнимую часть, превосходящую $\text{Im}\Delta\omega_m = 0.25 \times |\Omega_m|$. Следовательно, контур интегрирования в (5.50) нужно провести выше, чем $\text{Im}\Delta\omega_m = 0.25 \times |\Omega_m|$. Сплошная линия на рис. 6 показывает ход годографа, вычисленного для $\text{Im}\Delta\omega_m = 0.35 \times |\Omega_m|$. Эта линия не окружает начало координат. Поэтому заключаем, что для параметров $\zeta_m = 20$ и $2\pi\Gamma = 10$ инкременты коллективных мод не превышают величины $\text{Im}\Delta\omega_m = 0.35 \times |\Omega_m|$, а контур интегрирования в (5.50) может быть проведен вдоль линии $\text{Im}\Delta\omega_m = 0.35 \times |\Omega_m|$. При проведении таких расчетов требуемое время вычисления будет меньше, если удастся избежать необоснованно больших значений величины $\text{Im}\Delta\omega_m$.

5.2.1. Короткая память наведенных полей

В этом и следующем разделах для определенности полагаем, что $m_y = 1$ и $A > 0$. Вычисление интегралов в (5.56) и в (5.57) ведется вдоль уже описанного контура

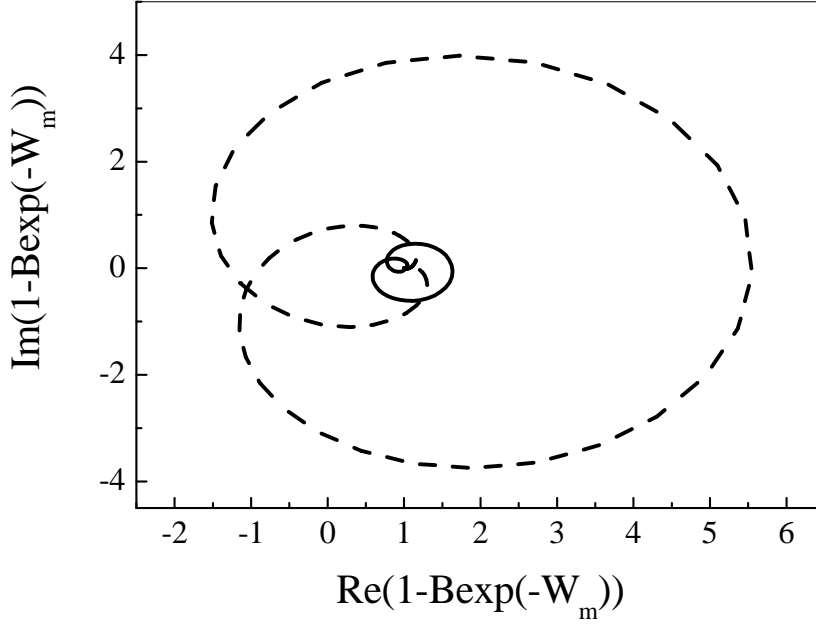


Рис. 6. Годографы функции $1 - Be^{-W_m}$ для $\text{Im}\Delta\omega_m = 0.25 \times |\Omega_m|$ (пунктир) и для $\text{Im}\Delta\omega_m = 0.35 \times |\Omega_m|$ (сплошная линия), $\zeta_m = 20$, $2\pi\Gamma = 10$, $g_m = 1$

С. Для области параметров, в которой $\zeta_m = 20$ и $2\pi\Gamma = 10$, результаты численного интегрирования предсказывают зависимости от времени амплитуд когерентного сигнала сгустка $|X_m(\phi, t)|$ и вклада коллективных мод $|P(\phi, t)|$, характерные для эффекта прерывания пучка (сплошные линии на рис. 7). На этом рисунке окружности показывают результаты подгонки сплошных линий простыми формулами:

$$|X_m(-\Delta, t)| = 0.34 \times \exp\left(\frac{\sqrt{|\Omega_m|} t}{0.86}\right) \quad (5.60)$$

и

$$|P_m(-\Delta, t)| = \exp(-2\pi\Gamma + (|\Omega_m| t)^{0.61}). \quad (5.61)$$

Видно разумное согласие предсказаний численного интегрирования и подгоночных кривых. Эти результаты, а также тот факт, что эффект прерывания пучка превалирует в когерентном сигнале при быстром забывании наведенных полей, качественно согласуется с полученными в предыдущих главах для когерентных колебаний монохроматического сгустка.

Аналогичные зависимости амплитуд от времени на интервале $|\Omega_m| t \leq 100$ обнаруживаются для того же значения Γ и $\zeta_m = 10$. Однако для больших интервалов времени ($|\Omega_m| t \leq 250$) и для величин $\zeta_m \leq 10$ оказывается, что амплитуды когерентного сигнала $|X_m(-\Delta, t)|$ могут в некоторый момент времени достигать максимума, а затем затухать (рис. 8). Такие зависимости амплитуд когерентного сигнала сгустка от времени характерны для эффекта прерывания пучка в присутствии какого-то механизма экспоненциального подавления когерентных колебаний. Более подробное изучение (например, рис. 9 и 10) показывает, что для меньших значений ζ_m амплитуды $|X_m|$ могут отклоняться от части сигнала, описывающей эффект прерывания

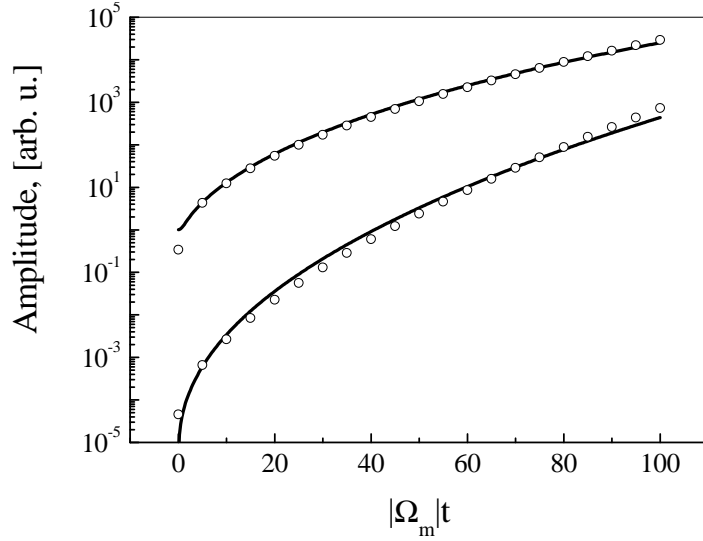


Рис. 7. Зависимости амплитуды когерентного сигнала сгустка $|X_m|$ (верхние кривые) и амплитуды вклада коллективных мод $|P(\phi, t)|$ (нижние кривые) от времени: окружности – результаты подгонок, $\zeta_m = 20$, $2\pi\Gamma = 10$, $\phi = -\Delta$

$|E_m|$, подавление которой разбросом частот может начинаться раньше самосогласованной части когерентного сигнала $|P_m|$. Такое поведение может отражать различия в механизмах подавления когерентных колебаний, вносящих вклады в эти две части когерентного сигнала. Функция $|E_m|$ затухает за счет расфазировки когерентных колебаний и модификации этой расфазировки в точке ϕ раскачки колебаний предыдущими частями сгустка. Амплитуды самосогласованной части сигнала $|P_m|$ подавляются затуханием Ландау коллективных мод и интерференцией мод колебаний. Начиная со значения $\zeta_m = 4$ функция $|X_m(-\Delta, t)|$ достигает максимума в области $|\Omega_m|t > 25$ (рис. 11). В области $|\Omega_m|t \geq 50$ уменьшение амплитуды $|X_m|$ со временем хорошо подгоняется формулой

$$|X_m| = 25 \times \exp\left(-\frac{|\Omega_m|t}{3.5 \times 2\pi\Gamma}\right). \quad (5.62)$$

Во всех описанных случаях вклад эффекта прерывания пучка в когерентный сигнал сгустка превышает вклады самосогласованных мод когерентных колебаний. Это свойство является следствием быстрого затухания наведенных сгустком полей.

5.2.2. Длительное запоминание полей

Удлинение памяти наведенных полей (или, уменьшение Γ) приводит к увеличению вкладов самосогласованных мод в когерентный сигнал сгустка. Одновременно более быстрое уменьшение инкрементов неустойчивых мод с ростом номеров мод может приводить к экспоненциальному или к почти экспоненциальному росту амплитуд когерентных колебаний во времени (рис. 12). Поскольку максимальный инкремент мод монохроматического сгустка равен $\Omega_m/(4\pi\Gamma)$, уменьшение Γ , вообще, убыстряет изменения амплитуд когерентных колебаний (рис. 8 и рис. 12). Например, сравнивая относительные вклады в $|X_m|$ функций $P_m(-\Delta, t)$ и $E_m(-\Delta, t)$ (рис. 13), находим, что

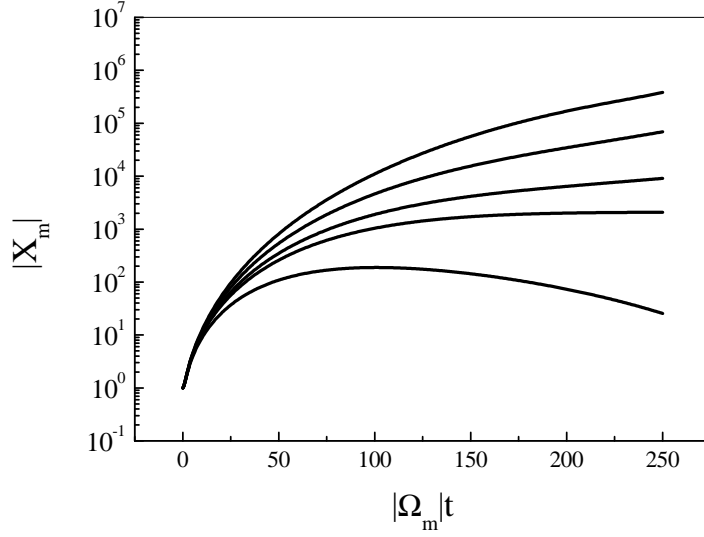


Рис. 8. Зависимость когерентного сигнала сгустка $|X_m|$ от времени: сверху вниз $\zeta_m = 15, 12, 10, 9$ и 7 ; $2\pi\Gamma = 10$, $\phi = -\Delta$

после переходного периода ($|\Omega_m|t \leq 50$) вклады в $|X_m|$ самосогласованных мод ($|P_m|$) доминируют и что в асимптотической области амплитуды когерентных колебаний увеличиваются во времени по экспоненциальному закону. Так, в области ($|\Omega_m|t \geq 70$) хорошую подгонку зависимости $|X_m|$ от времени дает формула

$$|X_m| = 0.7 \times \exp\left(\frac{|\Omega_m|t}{7.87}\right), \quad 2\pi\Gamma = 1. \quad (5.63)$$

Изучением данных на рис. 12 можно установить, что для значения параметра запоминания наведенных полей $2\pi\Gamma = 1$ пороговое значение параметра ζ_m находится в интервале $4.5 \geq \zeta_m \geq 4$. Вблизи порога неустойчивости когерентные колебания сгустка затухают в два этапа (рис. 14). Начальная стадия затухания хорошо подгоняется формулой

$$|X_m| = 1.85 \times \exp\left(-\frac{|\Omega_m|t}{25}\right), \quad 2\pi\Gamma = 1, \quad |\Omega_m|t \leq 20. \quad (5.64)$$

Затем, декремент затухания амплитуды уменьшается примерно в шесть раз, а формула подгонки зависимости $|X_m|$ от времени переходит в следующую:

$$|X_m| = 0.9 \times \exp\left(-\frac{|\Omega_m|t}{155}\right), \quad 2\pi\Gamma = 1, \quad |\Omega_m|t \geq 20. \quad (5.65)$$

Если параметры сгустка и наведенных полей оказываются глубоко под порогом неустойчивости когерентных колебаний, то указанная особенность зависимости $|X_m|$ от времени теряется (например, окружности и квадраты на рис. 15). Например, для $\zeta_m = 2$ затухание амплитуд когерентных колебаний хорошо подгоняется экспоненциальной функцией времени (рис. 15):

$$|X_m| = 1.2 \times \exp\left(-\frac{|\Omega_m|t}{5.5}\right), \quad 2\pi\Gamma = 1. \quad (5.66)$$

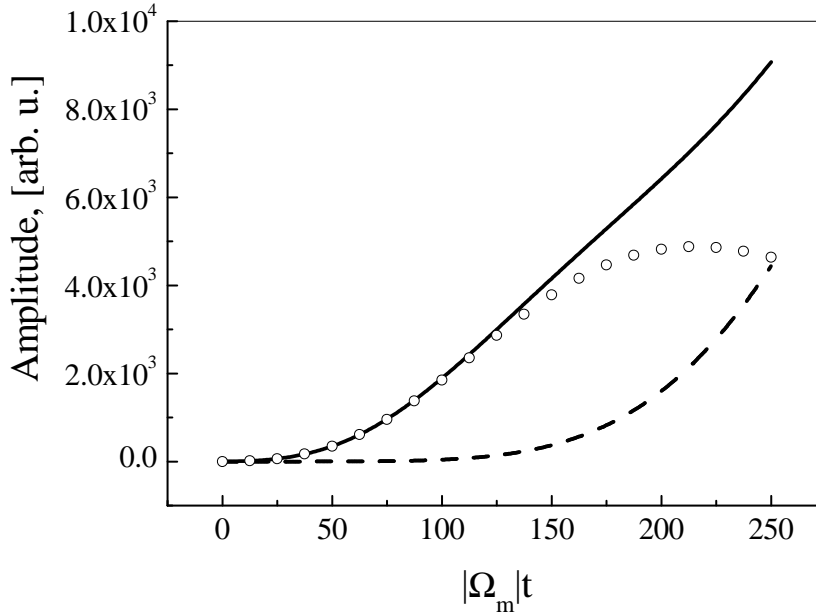


Рис. 9. Зависимости амплитуд когерентных колебаний от времени: сплошная линия – $|X_m|$, пунктирная – $|P_m|$, окружности – $|E_m|$; $\zeta_m = 10$, $2\pi\Gamma = 10$, $\phi = -\Delta$

В подпороговой области характеры зависимостей амплитуд когерентных колебаний от времени определяются величинами как ζ_m , так и $2\pi\Gamma$. Непосредственно ниже порога неустойчивости ($\zeta_m = 4$) и для не очень быстрого затухания наведенных полей (например, $2\pi\Gamma \leq 4$) амплитуды когерентных колебаний затухают в два этапа. Их начальное быстрое затухание сменяется более медленным. Более подробное изучение этого явления указывает на то, что оно обусловлено расхождением фаз функций $P_m(t)$ и $E_m(t)$. Так, согласно данным, изображенным на рис. 17, функции $|P_m(t)|$ и $|E_m(t)|$ могут превышать величину $|X_m(t)|$, что возможно лишь в тех областях, где вклады функций $P_m(t)$ и $E_m(t)$ в $X_m(t)$ компенсируют друг друга. Если интенсивность сгустка уменьшить в два раза ($\zeta_m = 2$), то затухание амплитуд когерентных колебаний осуществляется без изменения их декремента. Тот факт, что затухание амплитуд в два этапа обусловлено вкладами в когерентный сигнал самосогласованных мод подтверждается изучением верхнего графика на рис. 16, вычисленного в условиях, когда вклад мод в амплитуду сигнала пренебрежимо мал ($2\pi\Gamma = 10$).

Таковыми вычислениями могут быть найдены инкременты когерентных колебаний и исследованы их зависимости от параметров задачи.

5.2.3. Пороги неустойчивостей

Согласно данным, приведенным на рис. 8 и рис. 12, следует ожидать, что для определенного значения числа частиц в сгустке ($|\Omega_m|$) и разброса частот колебаний частиц (δ_y) первоначальное увеличение во времени амплитуд когерентных колебаний может смениться их насыщением, или их насыщением в среднем. Для сгустков с большим числом частиц амплитуды когерентных колебаний будут асимптотически нарастать со временем, а для сгустков с меньшим числом частиц будут асимптотиче-

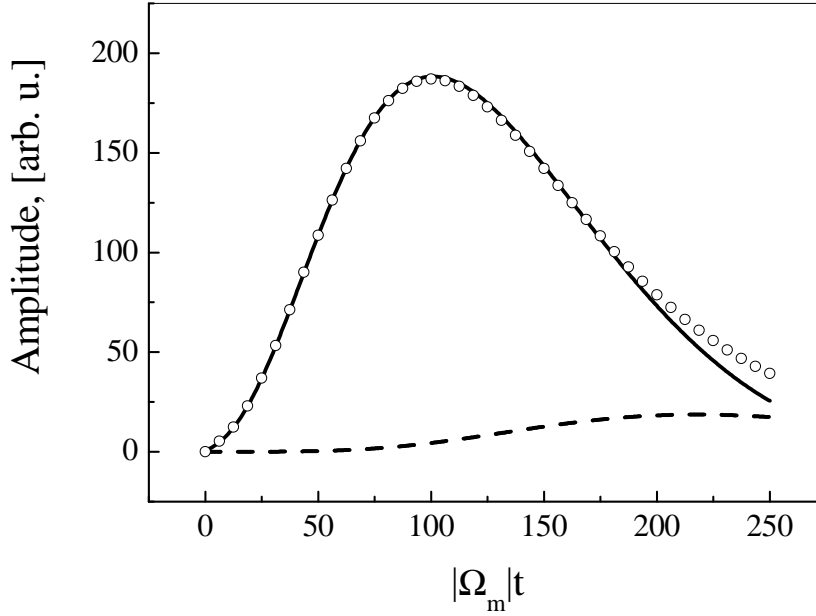


Рис. 10. То же, что на рис. 9, но $\zeta_m = 7$

ски затухать. Такое поведение амплитуд колебаний может быть идентифицировано как появление у когерентных колебаний сгустка порога неустойчивости. Само появление таких порогов возможно лишь благодаря присутствию в когерентном сигнале самосогласованных мод. В соответствии с общими положениями линейной теории когерентных колебаний (например, в [1]) порог неустойчивости в многочастотном когерентном сигнале появится при достижении границы области устойчивости наиболее неустойчивой модой пучка (например, рис. 18 и 19). В этом разделе вместо вычисления собственных частот и пороговых значений ζ_m мы будем находить пороги неустойчивости, изучая зависимости амплитуд когерентных сигналов сгустка от времени. В простейшем случае мы будем считать, что достижению порога соответствует область параметров задачи, в которой амплитуды когерентных колебаний становятся постоянными или – постоянными в среднем по времени на асимптотически больших интервалах времени. Отметим, что такой способ определения порога неустойчивости принимается во многих работах по экспериментальному изучению неустойчивых когерентных колебаний. Численное моделирование показывает (рис. 20 и 21), что такое определение порога неустойчивости оказывается очень чувствительным к величине ζ_m . Поэтому пороговое значение $\zeta_m = \zeta_{th}$ можно установить с весьма хорошей точностью.

Этот метод был использован для вычисления зависимостей ζ_{th} от, например, параметра запоминания полей $2\pi\Gamma$. При этом оказалось (рис. 22), что ход кривой $\zeta_m = \zeta_{th}(\Gamma)$ зависит от знака параметра A . Именно фокусировки, в которых $A < 0$, обеспечивают возможность достижения более высоких значений пороговых чисел частиц в сгустке, чем те, для которых $A > 0$. Это явление обусловлено различием в затухании Ландау коллективных мод в накопителях с фокусировкой, обеспечивающей положительный, или отрицательный знак параметра A . Согласно формуле (5.36) в нашей модели описания наведенных сгустком полей когерентный сдвиг

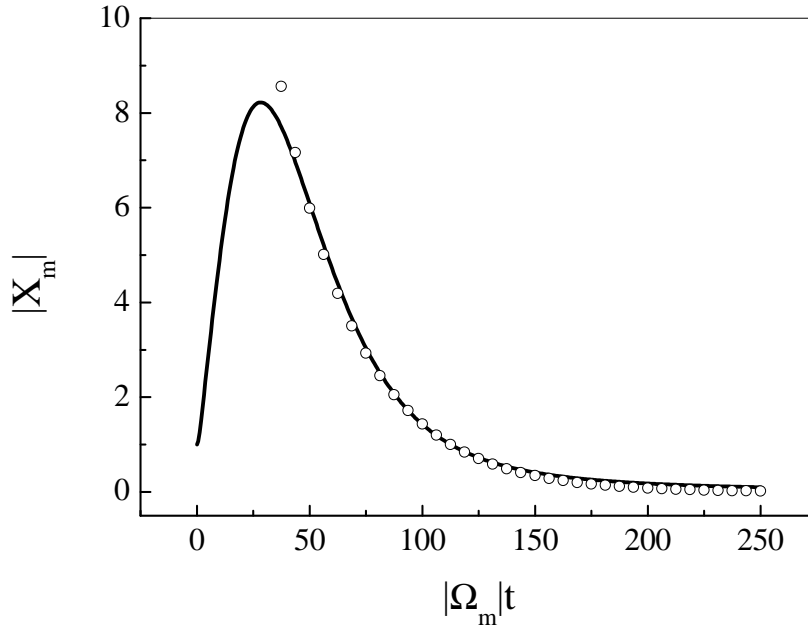


Рис. 11. Зависимость $|X_m|$ (сплошная линия) от времени. Окружности – подгонка по формуле Eq.(5.62); $\zeta_m = 4$, $2\pi\Gamma = 10$, $\phi = -\Delta$

частоты монохроматического сгустка отрицателен для $m_y > 0$ и положителен, если $m_y < 0$. Это означает [1], что в фокусировках, обеспечивающих отрицательные значения параметра A , частоты мод монохроматического сгустка попадают в гущу спектра некогерентных колебаний частиц. В таких условиях коллективные моды более эффективно обмениваются энергией с частицами сгустка, что усиливает их затухание Ландау и увеличивает пороги неустойчивости когерентных колебаний. Указанная разница в зависимости затухания когерентного сигнала сгустка от знака A хорошо видна на рис. 20 и 21, а также на рис. 23, где модуляции когерентного сигнала ($|X_m|$) и вклады в него коллективных мод сгустка ($|P_m|$) затухают дольше, если обеспечено условие $A > 0$. Описанная зависимость характера затухания поперечных когерентных колебаний сгустка от знака октупольной нелинейности фокусировки качественно согласуется с результатами наблюдений.

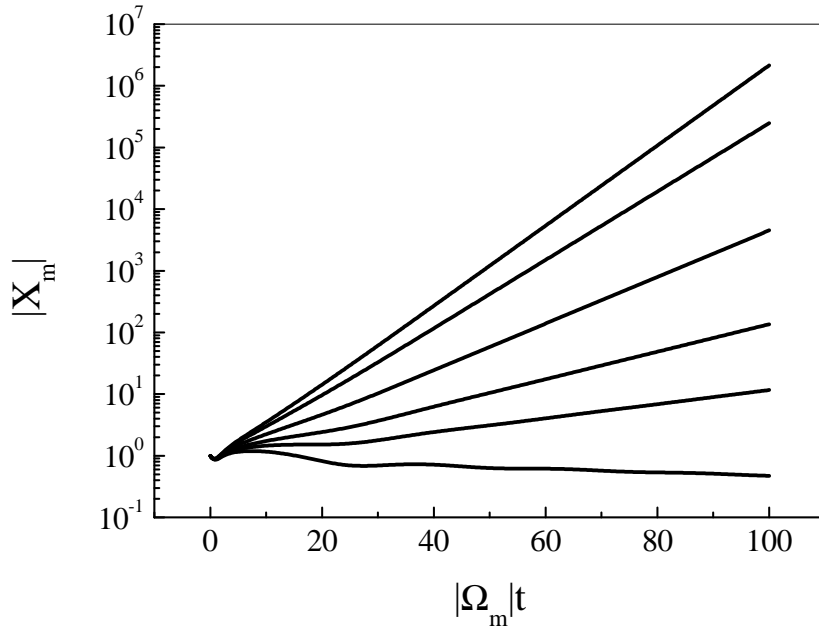


Рис. 12. Зависимости амплитуд $|X_m|$ от времени: сверху вниз – $\zeta_m = 10, 8, 6, 5, 4.5$ и 4 ; $2\pi\Gamma = 1$, $\phi = -\Delta$

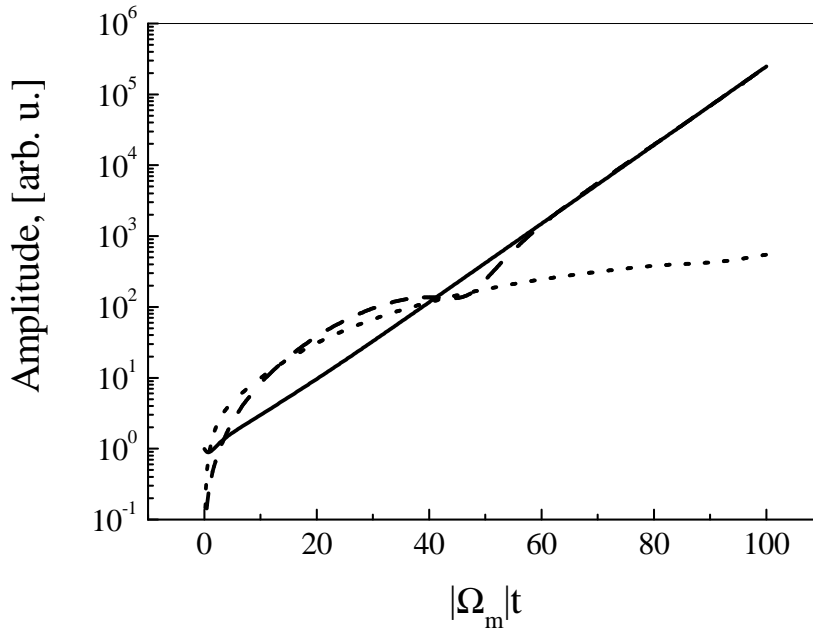


Рис. 13. Зависимости амплитуд когерентных колебаний от времени: сплошная линия – $|X_m|$, пунктирная – $|P_m|$, точки – $|E_m|$; $\zeta_m = 8$, $2\pi\Gamma = 1$, $\phi = -\Delta$

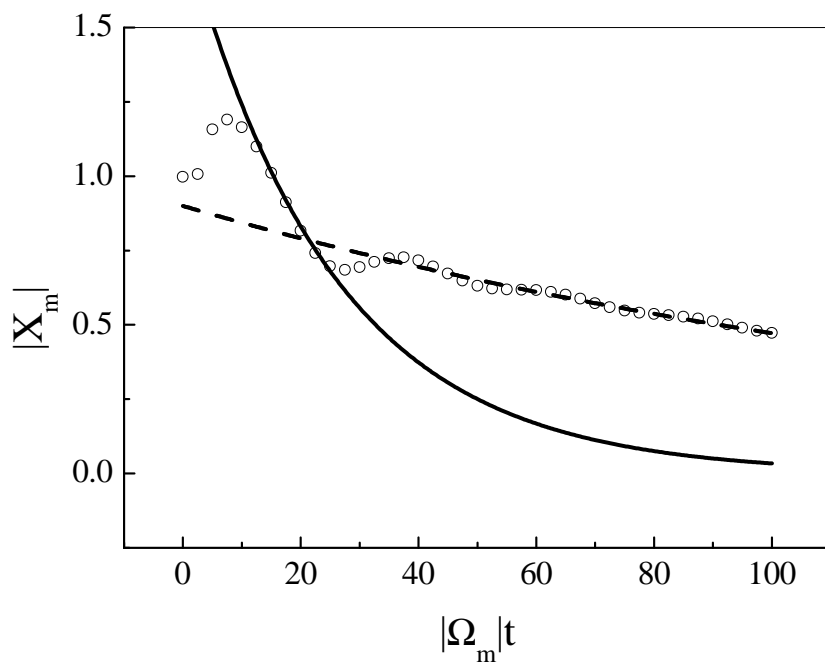


Рис. 14. Зависимость амплитуды когерентных колебаний от времени: $|X_m|$ – окружности, сплошная линия – результат подгонки по формуле (5.64), пунктирная – по формуле (5.65); $\zeta_m = 4$, $2\pi\Gamma = 1$, $\phi = -\Delta$

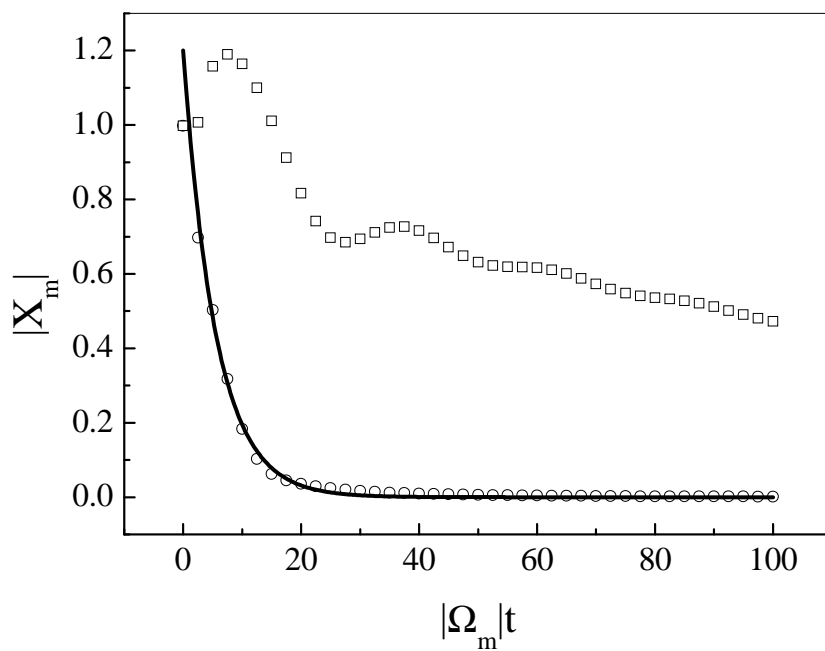


Рис. 15. Зависимость амплитуды когерентных колебаний $|X_m|$ от времени: окружности – $\zeta_m = 2$, сплошная линия – подгонка по формуле (5.66), квадраты – $\zeta_m = 4$; $2\pi\Gamma = 1$, $\phi = -\Delta$

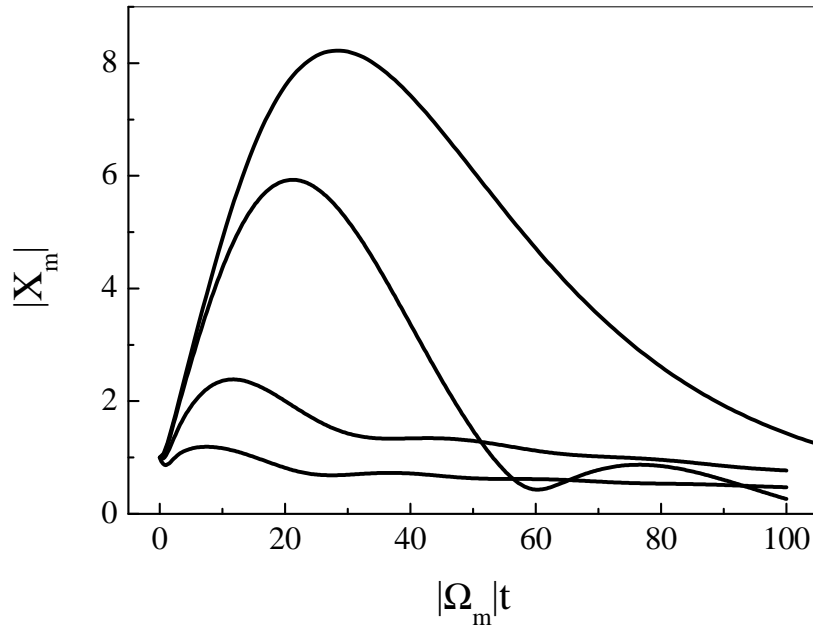


Рис. 16. Зависимость амплитуды когерентных колебаний $|X_m|$ от времени: сверху вниз $2\pi\Gamma = 10, 4, 2, 1$, $\zeta_m = 4$, $\phi = -\Delta$

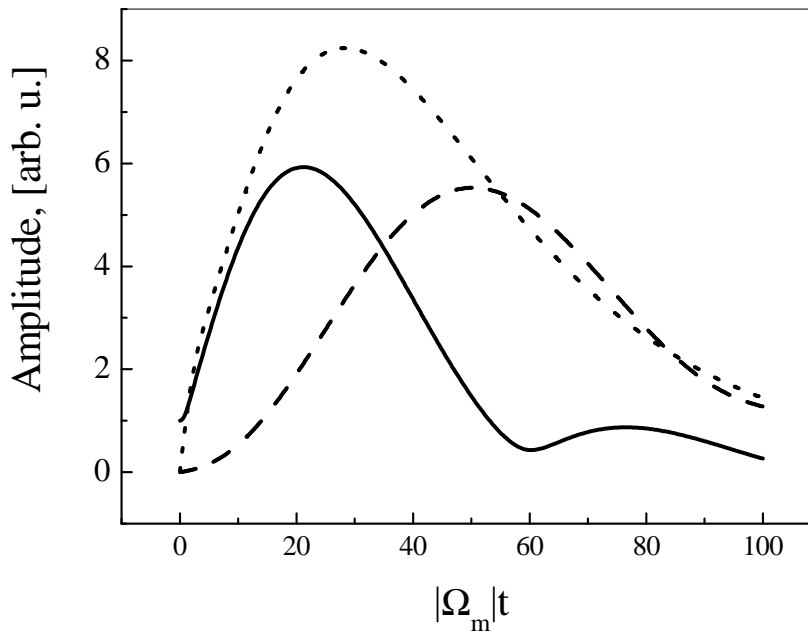


Рис. 17. Зависимость амплитуды когерентных колебаний от времени: сплошная линия – $|X_m|$, пунктирная – $|P_m|$, точки – $|E_m|$; $2\pi\Gamma = 4$, $\zeta_m = 4$, $\phi = -\Delta$

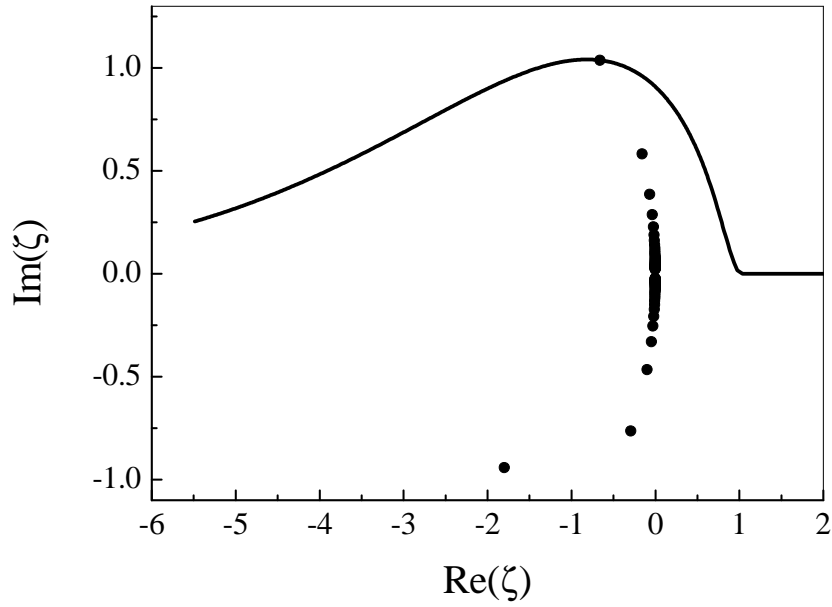


Рис. 18. Граница области устойчивости (сплошная линия) и карта частот первых ± 50 мод когерентных колебаний монохроматического сгустка (точки). Колебания мод устойчивы ниже граничной кривой, $m_y = 1$, $2\pi\Gamma = 2$, $\zeta_m = 6.873$, $A < 0$

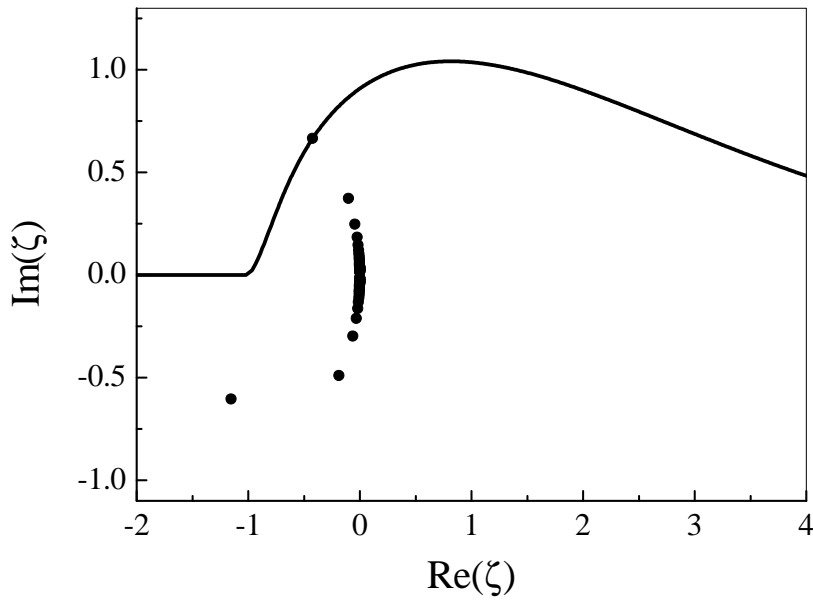


Рис. 19. То же, что на рис. 18, но $\zeta_m = 4.406$ и $A > 0$

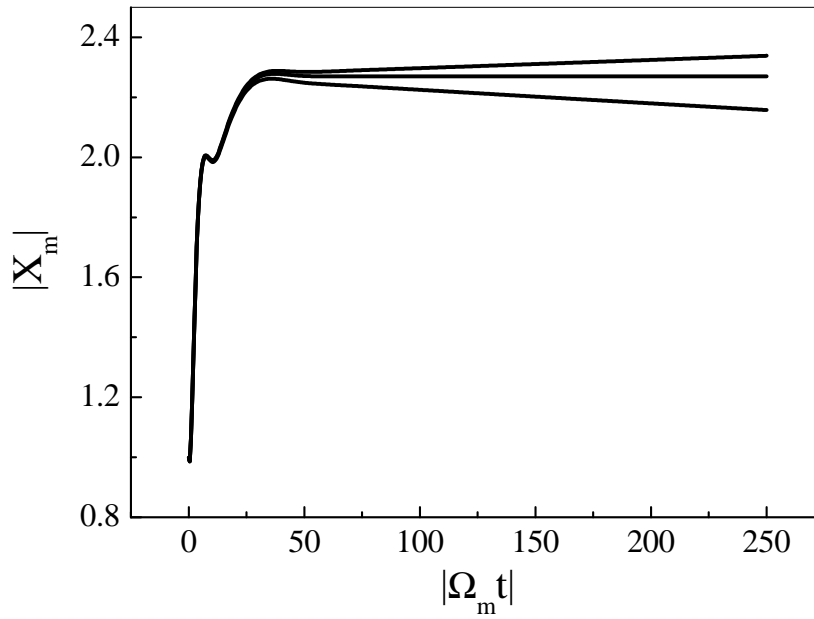


Рис. 20. Зависимость амплитуды когерентных колебаний $|X_m|$ от времени: сверху вниз $\zeta_m = 5.657, 5.6544$ и 5.650 ; $2\pi\Gamma = 2$, $\phi = -\Delta$, $A < 0$

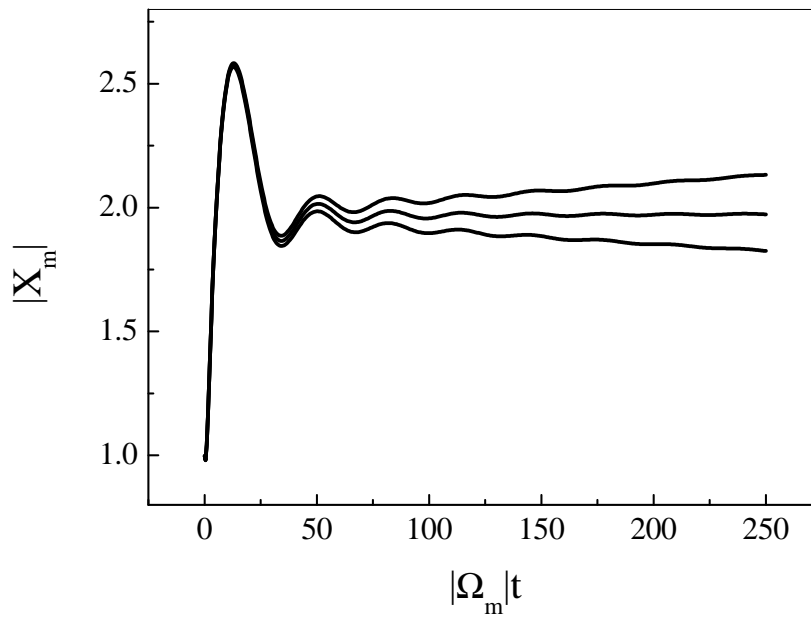


Рис. 21. Зависимость амплитуды когерентных колебаний $|X_m|$ от времени: сверху вниз $\zeta_m = 4.15, 4.1445$ и 4.14 ; $2\pi\Gamma = 2$, $\phi = -\Delta$, $A > 0$

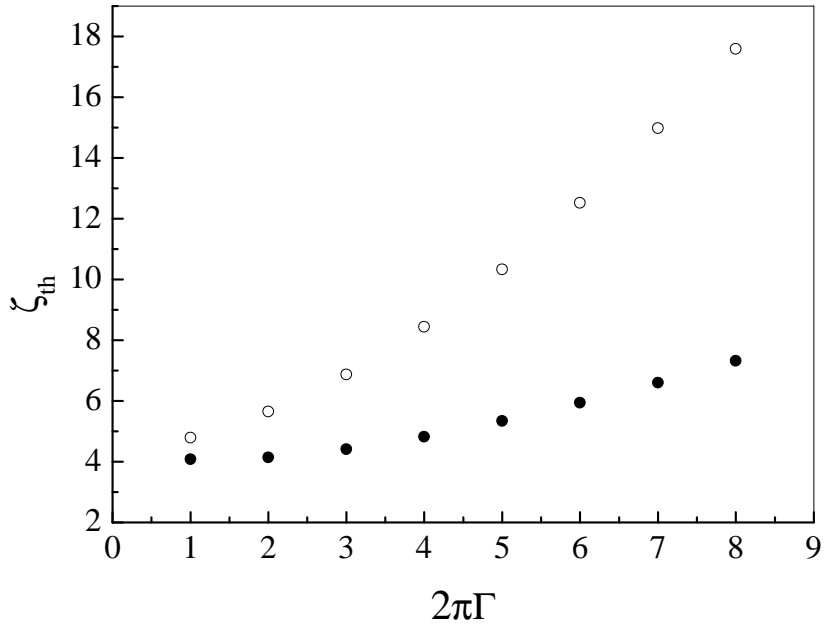


Рис. 22. Зависимости пороговых значений ζ_m от параметра памяти $2\pi\Gamma$: точки – $A > 0$, окружности – $A < 0$, $\phi = -\Delta$

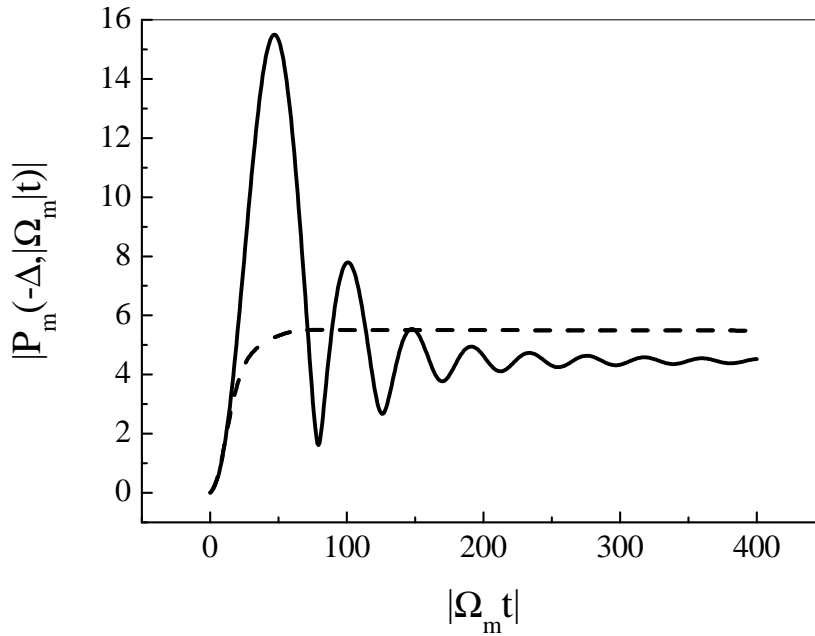


Рис. 23. Зависимости вкладов коллективных мод сгустка в его когерентный сигнал $|P_m|$ от времени: сплошная линия – $A > 0$, $\zeta_m = 4.406$, пунктир – $A < 0$, $\zeta_m = 6.873$; $2\pi\Gamma = 3$

Глава 6

Заключительные замечания

Проведенные вычисления указывают, что быстрые поперечные когерентные колебания сгустков описываются уравнениями, которые получаются из уравнений для связанных синхротронных колебаний сгустка в предельной области параметров, где развитие когерентных колебаний осуществляется существенно быстрее, чем частоты синхротронных колебаний частиц. Как и следовало ожидать, в такой области и в пренебрежении продольной подвижностью частиц продольными динамическими переменными частиц являются продольная фаза частицы ϕ и отклонение импульса частицы от равновесного значения Δp . При этом принимается, что Δp является интегралом невозмущенного движения частиц, а ϕ является циклической переменной. Описанные вычисления тем точнее, чем сильнее подавлена продольная подвижность частиц в сгустках. В свою очередь, поскольку $\phi' = |\alpha_p \Delta p| \sim v_s a_s$, где a_s – амплитуда синхротронных колебаний частицы, такое описание будет тем точнее, чем меньше значение частоты синхротронных колебаний частиц v_s .

Основные особенности развития в сгустках быстрых когерентных колебаний зависят от того, насколько длительно запоминаются наведенные сгустком в электродах поля. Так, если затухание полей полностью отсутствует, то неустойчивости когерентных колебаний носят резонансный характер. Этот случай достаточно подробно описан в [1] и поэтому не обсуждается в данном пособии.

Другой характерной области параметров соответствует полное забывание наведенных сгустком полей за время оборота частиц в машине. Например, это может быть реализовано, если сгусток взаимодействует с достаточно короткой согласованной пластиной (с пластиной, нагруженной на ее характеристическое сопротивление). Быстрые однооборотные неустойчивости сгустков развиваются так же, как они развивались бы в линейных ускорителях и в соответствии с этим приводят к эффекту (неустойчивости) прерывания пучка. Поэтому основные особенности быстрых однооборотных неустойчивостей в циклических машинах совпадают с особенностями эффекта прерывания пучка. Так, отсутствие обратных связей когерентных колебаний головной и хвостовой частей сгустка приводит к отсутствию у когерентных колебаний собственных мод колебаний. Следствием этого является отсутствие в спектре колебаний сгустка собственных частот колебаний, а также затухания Ландау когерентных колебаний сгустка. Увеличение амплитуд когерентных колебаний в пучке осуществляется резонансной раскачкой колебаний позади идущих частиц сгустка впереди идущими. Благодаря изменениям фаз возмущающих сил вдоль сгустка

амплитуды колебаний в заданной точке сгустка увеличиваются медленнее, чем по экспоненциальному закону.

Разведение частот бетатронных колебаний частиц вдоль пучка замедляет или вообще устраняет неустойчивость. Аналогичным образом влияют на быстрые однооборотные неустойчивости и другие разбросы частот бетатронных колебаний частиц, приводя к расфазировке когерентных колебаний сгустка. Поскольку раскачка увеличивает амплитуды колебаний медленнее, чем по экспоненциальному закону, практически любое значение разброса частот колебаний частиц приводит к затуханию быстрых однооборотных когерентных колебаний сгустка на больших временах. При этом амплитуда колебаний первоначально увеличивается за счет раскачки, достигает некоторого своего максимального значения, а уж затем затухает. Поэтому желательное значение разброса частот бетатронных колебаний в сгустке может определяться допустимым значением максимальной амплитуды когерентных колебаний. По аналогии с эффектом прерывания пучка, амплитуды когерентных колебаний в сгустке могут заметно увеличиваться при приближении к хвостовой части сгустка.

6.1. Запоминание наведенных полей

В пучке, состоящем из одного сгустка, запоминание наведенных полей электродами замыкает обратную связь когерентных колебаний хвостовой и головной частей сгустка. В результате у когерентных колебаний появляются самосогласованные собственные моды и спектры собственных частот этих мод. Такие решения описывают многооборотную часть колебаний. Поэтому такое описание не может быть полным. Оно дополняется однооборотными колебаниями сгустка, которые, как и в отсутствие запоминания, описывают эффект прерывания пучка.

Собственные частоты и функции самосогласованных мод не являются аналитическими функциями параметра запоминания наведенных полей (в наших вычислениях это величина Λ_m). По этой причине даже в случае очень слабого запоминания полей собственные решения не могут быть получены по теории возмущений с использованием в качестве нулевого приближения вычисления амплитуд, описывающие эффект прерывания пучка. Вообще, при выполнении условия $|\Omega_m| \gg \omega_s$ значения когерентных сдвигов частоты собственных мод $\Delta\omega_m^{(k)}$ оказываются малыми, или даже существенно меньшими, чем величина Ω_m . Согласно формулам (3.42) и (3.45) собственные функции мод представляют собой искаженные плоские волны с волновыми векторами $(2\pi k/\phi_b)$, где ϕ_b – длина сгустка в единицах среднего радиуса замкнутой орбиты R_0 . Собственные частоты таких мод определены в (3.42):

$$\frac{\Omega_m}{\Delta\omega_m^{(k)}} - \ln \frac{\Lambda_m}{1 + \Lambda_m} = 2\pi ik, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.1)$$

Поэтому взаимодействие когерентных колебаний сгустка с наведенными полями приводит к появлению мод колебаний, амплитуды которых могут как затухать, так и нарастать. Так, для модели наведенных полей, которую мы использовали для расчетов (3.20), моды, распространяющиеся против движения сгустка ($m(k + m\delta v_y) < 0$) оказываются неустойчивыми. Если, для примера, заменить в дисперсионном уравнении длину сгустка периметром замкнутой орбиты, мы обнаружим, что найденные

моды вполне аналогичны тем, которые появляются в задаче о вычислении собственных решений, описывающих когерентные колебания несгруппированного пучка с постоянной линейной плотностью частиц. В согласии с теоремой о сумме декрементов когерентных мод (например, в [2]) сумма когерентных сдвигов частот $\Delta\omega_m^{(k)}$ по всем номерам мод k равна когерентному сдвигу частоты монохроматического сгустка нулевой длины.

Результат решения задачи о развитии в сгустке начальных когерентных колебаний позволяет записать амплитуды колебаний в виде суммы двух слагаемых. Первое описывает развитие в сгустке колебаний, составленных из самосогласованных мод. Второе описывает эффект прерывания сгустка за счет однооборотного взаимодействия когерентных колебаний сгустка с наведенными полями. Поскольку в спектре собственных решений отсутствуют одна или несколько лидирующих мод (например, (6.1)), интерференция вкладов отдельных мод в колебание уменьшает темп увеличения амплитуд колебаний во времени. Более того, для монохроматических сгустков как самосогласованная, так и однооборотная части решения описываются квазиэкспоненциальными функциями времени (например, в формулах (3.84), (3.85) и (3.90)). Такие неустойчивые колебания могут стабилизироваться разбросом частот бетатронных колебаний в пучке, или широкополосной системой обратной связи для подавления дипольных когерентных колебаний.

Согласно формулам (3.84), (3.85), (3.90) и при условии, что запоминание наведенных полей слабо (в нашей модели $2\pi\Gamma \gg 1$) вклады эффекта прерывания пучка в амплитуды когерентных колебаний доминируют.

Запоминание окружающими пучок электродами наведенных сгустками полей приводит к дополнительным неустойчивостям когерентных колебаний пучков, составленных из отдельных сгустков. Причиной таких неустойчивостей является связь колебаний сгустков в пучке и образующиеся в результате такой связи дополнительные степени свободы пучка. Наиболее распространенным является решение такой задачи в предположении о равномерном распределении идентичных сгустков вдоль замкнутой орбиты. Простой анализ показывает (например, в [1]), что возможность возбуждения наведенными полями относительных колебаний сгустков пучка приводит к расширению семейства неустойчивых мод колебаний, описывающих т. н. многосгустковые когерентные колебания сгустков пучка. В соответствии с этим, для классификации когерентных колебаний пучка эквидистантных и идентичных сгустков появляется дополнительный номер моды, описывающий геометрические особенности относительных колебаний сгустков. Если пучок составлен из M_t сгустков, то полное число многосгустковых мод пучка равно M_t . В отсутствие в сгустках разбросов частот бетатронных колебаний, как правило, примерно половина многосгустковых мод неустойчива. Для подавления многосгустковых неустойчивостей дипольных когерентных колебаний используются системы обратных связей. При этом предпочтительно использование систем обратных связей, которые способны селективно действовать на колебания отдельных сгустков пучка и не возмущать когерентные колебания остальных сгустков. В пучке с конечной величиной разброса частот бетатронных колебаний возможно подавление неустойчивых мод затуханием Ландау. Очевидно, что при этом все многосгустковые моды когерентных колебаний должны находиться внутри границы области устойчивости (например, в [1]).

В современных накопителях заряженных частиц все чаще стали использоваться способы заполнения пучка сгустками, при которых равномерное заполнение пучка сгустками начиная с некоторого номера сгустка прерывается, а оставшиеся сепаратрисы оставляются пустыми. Мы называем такой способ заполнения пучка квазиравномерным. В такой задаче появляется два параметра, определяющих картину заполнения пучка. Это число сгустков, позволяющее провести равномерное заполнение сгустками замкнутой орбиты M и число сгустков в пучке M_t . При квазиравномерном заполнении пучка числа M и M_t не равны. По определению, $M > M_t$, а разница $M_g = M - M_t$ определяет длину зазора в картине заполнения пучка.

Для пучков с квазиравномерным заполнением идентичными сгустками и в рамках используемой здесь модели наведенных полей собственные многосгустковые моды когерентных колебаний находятся прямыми вычислениями. Найденные многосгустковые моды не смешиваются с односгустковыми модами когерентных колебаний пучка и поэтому номера многосгустковых мод классифицируют когерентные колебания пучка.

Согласно вычислениям, выполненным в главе 4, этим же свойством обладают и спектры быстрых когерентных колебаний. Однако, в отличие от медленных неустойчивостей, свойства быстрых колебаний могут значительно меняться действием на сгустки эффекта прерывания пучка. Это может выражаться в значительном увеличении амплитуд колебаний сгустков при продвижении от начала пучка к его хвостовой части. Кроме того, поскольку вычисление собственных мод колебаний не завершает задачу об определении условий устойчивости быстрых когерентных колебаний, расчет приходится проводить до получения явных зависимостей амплитуд когерентных колебаний сгустков пучка от времени. Как и в задаче о когерентных колебаниях одиночного сгустка это связано с неполнотой описания колебаний пучка собственными модами, а также с отсутствием в спектре коллективных мод лидирующей моды.

Благодаря квазиэкспоненциальному закону нарастания амплитуд когерентных колебаний монохроматического пучка во времени демпфирование таких неустойчивостей может осуществляться любым механизмом, обеспечивающим затухание амплитуд во времени по экспоненциальному закону. Значения требуемых для этого декрементов когерентных колебаний определяются только допустимой в задаче величиной максимальной амплитуды когерентных колебаний.

6.2. Затухание Ландау и пороги неустойчивостей

Исследование действия разбросов частот бетатронных колебаний на развитие быстрых поперечных когерентных колебаний сгустка изучалось в предположении о том, что сам разброс формируется октупольной компонентой фокусирующих полей накопителя. В качестве конкретной зависимости частот бетатронных колебаний от амплитуд бетатронных колебаний частиц использовалась формула (5.3). Для дополнительного упрощения расчетов использовалось предположение о ступенчатом распределении линейной плотности частиц в сгустке (5.51).

Большинство вычислений зависимости амплитуд когерентных колебаний от времени выполнялось численным интегрированием в формулах (5.56) и (5.57). Это позволило избежать расчета собственных частот и собственных функций самосогласо-

ванных мод, а также вкладов отдельных мод в когерентный сигнал сгустка. Положение контура интегрирования в плоскости комплексной переменной $\Delta\omega_m$ устанавливалось выше инкремента наиболее неустойчивой моды. Само значение такого инкремента находилось исследованием хода годографа функции в левой части дисперсионного уравнения (5.34). Кроме того, предполагалось, что амплитуды начальных когерентных колебаний сгустка генерировались малым поперечным ударом сгустка в вертикальном направлении. Амплитуда удара предполагалась равной для всех частиц сгустка (например, в (5.41)).

Для области параметров, в которой запоминание наведенных полей мало ($2\pi\Gamma \geq 10$), а также для малых значений разброса частот колебаний в сгустке (например, $|\xi_m| \geq 20$) результаты численного интегрирования оказываются в качественном согласии с результатами аналитических расчетов, выполненных для монохроматического сгустка (рис. 7). Из-за слабого запоминания наведенных полей главные вклады в амплитуды когерентных колебаний сгустка дает эффект прерывания пучка. Амплитуда когерентного сигнала резко меняется вдоль сгустка. Увеличение разброса частот колебаний или уменьшение числа частиц в сгустке до, например, уровня такого, что $|\xi_m| \simeq 9$, позволяет видеть затухание амплитуд когерентных колебаний на больших временах (см., например, рис. 8). Качественно, уменьшение когерентного сигнала согласуется с уменьшением со времени вклада в него эффекта прерывания пучка (рис. 10).

С удлинением памяти наведенных полей (например, если $2\pi\Gamma < 10$) увеличиваются вклады самосогласованных мод пучка в его когерентные сигналы. Если величина параметра запоминания наведенных полей невелика (скажем, $2\pi\Gamma = 1 \div 8$) вклады коллективных мод в когерентный сигнал сгустка могут превысить на больших временах вклад эффекта прерывания пучка. Помимо этого, в промежуточно асимптотической области интервалов времени зависимости амплитуд когерентных сигналов сгустков большой интенсивности от времени приближаются к экспоненциальным (рис. 13). С уменьшением интенсивности сгустка возможно появление порогов быстрых неустойчивостей сгустков. Если фокусировка накопителя соответствует области параметров, где $A > 0$, приближение к порогам неустойчивости сопровождается появлением модуляций амплитуд когерентных сигналов во времени. Кроме того, вблизи порога, но в подпороговой области, когерентный сигнал начинает затухать в два этапа. После начального и сравнительно быстрого затухания сигнала, появляется область, в которой когерентные колебания затухают существенно медленнее (рис. 14). Из общих соображений можно ожидать, что выше порога неустойчивости инкременты колебаний линейно увеличиваются с ростом числа частиц в сгустке.

Появление порогов неустойчивости совпадает с достижением границы области устойчивости инкрементом максимально неустойчивой моды сгустка. Значение порогового числа частиц в сгустке (ζ_{th}) зависит от знака параметра A . Для модели описания наведенных полей, использованной в наших вычислениях, в фокусировках, обеспечивающих $A < 0$, значения пороговых интенсивностей сгустка оказываются выше, чем в тех, где $A > 0$. Более высокие пороги неустойчивости соответствуют более быстрому затуханию Ландау колебаний. Это осуществляется в тех случаях, когда значения когерентных сдвигов частот мод монохроматического сгустка попадают в гущу спектра некогерентных колебаний частиц пучка (рис. 18 и 19).

В изученной модели появление собственных мод когерентных колебаний обусловлено запоминанием наведенных сгустком полей. Поэтому величина порогового числа частиц в сгустке (ξ_{th}), вообще, зависит от значения частоты бетатронных колебаний частиц.

Обращает на себя внимание еще одна особенность зависимости от времени амплитуд когерентных колебаний в околопороговой области. Если начальные значения амплитуд невелики, то колебания начинаются с роста их амплитуд до некоторого значения. Этот рост сигнала сгустка обусловлен неустойчивостью эффекта прерывания пучка. Благодаря действию разброса частот в пучке такой рост асимптотически сменяется затуханием однооборотной части когерентных колебаний. В этот момент времени вступают в действие изменения амплитуд за счет многооборотных эффектов или, что то же, за счет собственных мод сгустка. Начальные значения амплитуд колебаний для этого этапа уже подготовлены их предварительной однооборотной раскачкой. Прямо на пороге неустойчивости и после некоторого переходного периода амплитуды когерентных колебаний асимптотически перестают зависеть от времени (например, рис. 23)

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Пестриков Д. В. Лекции по когерентным колебаниям. Ч. 1, 2. Уч. пос. Новосибирск, 1996.
- [2] Диканский Н. С., Пестриков Д. В. Физика интенсивных пучков в накопителях. Новосибирск: Наука, 1989.
- [3] Dikansky N. S., Pestrikov D. V. Physics of Intense Beams and Storage Rings. N.Y.: AIP PRESS, 1994.
- [4] Tricomi F. G. Integral Equations, Interscience Publishers, INC., N. Y.: Interscience Publishers LTD, London 1957.