

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Д. В. ПЕСТРИКОВ

**Нелинейные эффекты в динамике
циркулирующих пучков**

Учебное пособие

НОВОСИБИРСК
2002

ББК В381.1 я73-1

УДК 621.384.6.01

Пестриков Д.В. Нелинейные эффекты в динамике циркулирующих пучков: Учеб. пособие / Новосиб. ун-т. Новосибирск, 2002.

Пособие предназначено для студентов и магистрантов Новосибирского государственного университета, занимающихся на спецкурсе «Нелинейные эффекты в динамике пучков». В нем приведены лекции, которые в течение ряда лет читались в НГУ по этому предмету.

Рецензент

заведующий кафедрой физики ускорителей НГУ
др. физ.-мат. наук И.А. Кооп

Утверждено на заседании кафедры физики ускорителей.

© Новосибирский государственный университет, 2002

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	5
1. НЕВОЗМУЩЕННЫЕ БЕТАТРОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ	6
1.1. Одномерные колебания	6
1.2. Связанные колебания	10
2. ВОЗМУЩЕНИЯ БЕТАТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ	14
2.1. Теорема Лиувилля	14
2.2. Метод усреднения	18
3. СДВИГИ ЧАСТОТ	22
3.1. Секступоли	25
3.2. Второй порядок теории возмущений	26
3.3. Октауполи	30
4. ВНЕШНИЙ РЕЗОНАНС	32
4.1. Устойчивость колебаний	33
4.2. Резонансная кривая	35
4.3. Сепаратриса	38
4.4. Влияние трения	39
5. РЕЗОНАНСНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ СЕКСТУПОЛЯМИ	43
6. ВСТРЕЧНЫЕ ПУЧКИ	48
6.1. Светимость	48
6.2. Поле встречного сгустка	50
6.3. Неустойчивость линейных колебаний частиц	52
6.4. Самосогласованные β -функции	56
7. ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ ПОЛЕЙ ПУЧКОВ	62
7.1. Эффекты гамильтоновой динамики	63
7.2. Действие трения на резонансы встречных пучков	70

8. ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОД УГЛОМ	71
8.1. Синхробетатронные резонансы	72
8.2. Краб-кроссинг	78
9. ПРОТЯЖЕННЫЕ СГУСТКИ	80
9.1. Сдвиги частот малых бетатронных колебаний	80
9.2. Мощности резонансов	83
10. ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ ЗАРЯД	85
10.1. Кулоновский сдвиг частоты	87
10.2. Резонансы за счет полей пространственного заряда	90
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	93

ПРЕДИСЛОВИЕ

Фокусирующие системы современных циклических ускорителей и накопителей заряженных частиц неизбежно содержат элементы, поля в которых нелинейно зависят от координат частиц. Хотя сами такие поля могут быть малы по сравнению с полями, обеспечивающими движение частиц вдоль замкнутых орбит, из-за периодичности движения частиц они могут вызывать заметные изменения положений замкнутых орбит частиц, частот колебаний относительно этих орбит и условий устойчивости колебаний частиц. Как правило, вычисления изменений параметров пучков под действием даже слабых нелинейных полей не могут быть проведены в общем виде. Поэтому их влияние на движение частиц исследуется либо по теории возмущений, либо с помощью численных методов. В последнем случае решения задач по теории возмущений, оказываются тем не менее полезны для проверки предсказаний программ и качественной интерпретации результатов счета.

В этих лекциях мы обсудим ряд проблем, иллюстрирующих применение простых методов нелинейной механики для описания движения частиц в циклических ускорителях и накопителях заряженных частиц. Проведение таких вычислений уже давно стало рутинной и в значительной степени обязательной операцией при проектировании и запуске подобных установок. Вместе с тем колебания частиц в ускорителях обладают рядом особенностей, затрудняющих прямое использование формул, с которыми студенты уже встречались при изучении нелинейных колебаний в курсе классической механики.

Мы ограничимся обсуждением простых и вместе с тем типичных вопросов, которые могут встретиться студентам при работе на реальных установках. По этой причине в курс включено упрощенное обсуждение проблем устойчивости встречных пучков, а также короткое обсуждение влияния полей пространственного заряда пучка на устойчивость колебаний частиц.

1. НЕВОЗМУЩЕННЫЕ БЕТАТРОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

1.1. Одномерные колебания

В циклических ускорителях и накопителях частицы с заданной энергией $\mathcal{E} = c\sqrt{p^2 + M^2c^2}$ движутся вблизи замкнутой равновесной орбиты $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\theta)$. Это достигается такой фокусировкой частиц, чтобы при отклонении от замкнутой орбиты частицы совершали бетатронные колебания. Линейные, одномерные бетатронные колебания частицы с заданной энергией описываются уравнениями (см., например, [1])

$$x'' + g(\theta)x = 0. \quad (1.1)$$

В качестве независимой переменной используется обобщенный азимут частицы $\theta = s/R_0$, где s - путь, пройденный частицей вдоль орбиты, а $2\pi R_0$ - периметр орбиты, x - радиальное отклонение частицы от замкнутой орбиты (вертикальное смещение будет обозначаться через z), а коэффициент $g(\theta)$ определяет жесткость фокусировки. Поскольку $g(\theta)$ является периодической функцией азимута

$g(\theta + \theta_0) = g(\theta)$, решения уравнения (1.1) обычно записывают в виде

$$x(\theta) = \sqrt{J\beta(\theta)} \cos(\psi + \chi(\theta)), \quad (1.2)$$

$$x' = R_0 \frac{p_x}{p} = \frac{\beta'}{2\beta} x - R_0 \sqrt{\frac{J}{\beta}} \sin(\psi + \chi(\theta)).$$

Здесь $x' = dx/d\theta$, $p = \gamma Mv$ - импульс частицы на замкнутой орбите, а $\beta(\theta)$ и $\chi(\theta)$ - периодические функции θ с периодом θ_0 . Они удовлетворяют уравнениям

$$\chi' + \nu = \frac{R_0}{\beta(\theta)} \quad (1.3)$$

и

$$\beta'' - \frac{(\beta')^2}{2\beta} + 2g(s)\beta = \frac{2R_0^2}{\beta(s)}. \quad (1.4)$$

Величины $x(\theta)$ и $p_x(\theta)$ в уравнении (1.2) являются решениями гамильтоновой системы уравнений

$$x' = \frac{\partial h}{\partial p_x}, \quad p'_x = -\frac{\partial h}{\partial x}, \quad (1.5)$$

где

$$h = \frac{R_0}{2p} p_x^2 + \frac{p}{2R_0} g(\theta) x^2. \quad (1.6)$$

По этой причине переменные x и p_x канонически сопряжены, а уравнения (1.2) осуществляют каноническое преобразование от переменных x и p_x к переменным действие - фаза ($I_x = Jp/2$ и ψ) невозмущенных колебаний. Действительно, поскольку ($\phi = \psi + \chi(\theta)$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial J} &= \sqrt{\frac{\beta \cos \phi}{J}} \frac{1}{2}, & \frac{\partial x}{\partial \psi} &= -\sqrt{J\beta} \sin \phi, \\ \frac{\partial p_x}{\partial J} &= \frac{p\beta'}{2R_0\beta} \frac{\partial x}{\partial J} - \frac{p \sin \phi}{2\sqrt{J_x\beta}}, \\ \frac{\partial p_x}{\partial \psi} &= \frac{p\beta'}{2R_0\beta} \frac{\partial x}{\partial \psi} - p\sqrt{\frac{J}{\beta}} \cos \phi, \end{aligned}$$

вычисление скобки Пуассона $[p_x, x]$ дает

$$[p_x, x] = \frac{\partial p_x}{\partial I} \frac{\partial x}{\partial \psi} - \frac{\partial p_x}{\partial \psi} \frac{\partial x}{\partial I} = 1.$$

Производящая функция такого преобразования ($S(x, \psi, \theta)$) находится решением уравнения Гамильтона - Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} + \frac{R_0}{2p} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \frac{pg(\theta)x^2}{2R_0} = 0. \quad (1.7)$$

Полагая

$$S = p \frac{x^2 v'(\theta)}{2R_0 v(\theta)}, \quad (1.8)$$

находим, что $v(\theta)$ удовлетворяет уравнению, совпадающему с уравнением (1.5)

$$v'' + g(\theta)v = 0.$$

Поэтому можем написать

$$v = \sqrt{J\beta(\theta)} \cos \phi, \quad \phi = \psi + \chi(\theta), \quad \psi = \nu\theta + \psi_0.$$

Подстановка этого выражения в формулу (1.8) дает

$$S = p \frac{x^2}{2} \left(\frac{\beta'}{2R_0\beta} - \frac{\tan(\phi)}{\beta} \right). \quad (1.9)$$

При этом

$$R_0 \frac{p_x}{p} = \frac{R_0}{p} \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\beta'}{2\beta} x - R_0 \frac{x}{\beta} \tan \phi$$

совпадает с правой частью в уравнении (1.2), если мы положим $x(I, \psi, \theta) = v$. Аналогично получаем

$$I = -\frac{\partial S}{\partial \psi} = \frac{x^2 p}{2\beta \cos^2 \phi} = \frac{Jp}{2}.$$

Значение гамильтониана в новых переменных ($h + \partial S/\partial \theta$) равно

$$h(I, \psi) = \frac{p\nu x^2}{2\beta \cos^2(\phi)} = \nu I. \quad (1.10)$$

Оно не зависит от азимута частицы и потому сохраняется. Как и следовало ожидать, эта величина совпадает с энергией осциллятора с частотой ν и действием I . Поскольку гамильтониан частицы в формуле (1.10) не зависит от фазы колебаний, величина I является интегралом движения. При постоянной энергии частиц фазовыми траекториями являются эллипсы

$$J = \frac{x^2}{\beta} + \frac{\beta}{R_0^2} \left(x' - \frac{\beta'}{2\beta} x \right)^2. \quad (1.11)$$

Для численного моделирования бывает удобнее представить уравнения (1.2) в матричной форме. Для этого выразим J и ψ_0 через p_x и x в некоторой начальной точке орбиты θ_{in} :

$$x_0 = \sqrt{J\beta_0} \cos \psi_0, \quad \frac{p_0}{p} = \frac{\beta'_0}{2R_0\beta_0} x_0 - \sqrt{\frac{J}{\beta_0}} \sin \psi_0.$$

После этого пишем ($\Delta\phi = \phi(\theta) - \phi(\theta_{in})$)

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \sqrt{J\beta(\theta)} \cos[\Delta\phi + \psi_0] \\ &= \sqrt{J\beta} [\cos(\Delta\phi) \cos \psi_0 - \sin(\Delta\phi) \sin \psi_0] \\ &= x_0 \sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}} \left(\cos(\Delta\phi) - \frac{\beta'_0}{2R_0} \sin(\Delta\phi) \right) + \frac{p_0}{p} \sqrt{\beta\beta_0} \sin(\Delta\phi). \end{aligned}$$

Аналогично получим

$$\begin{aligned} \frac{p_x(\theta)}{p} &= \frac{x_0}{\sqrt{\beta\beta_0}} \left[\frac{\beta' - \beta'_0}{2R_0} \cos(\Delta\phi) - \left(1 + \frac{\beta'\beta'_0}{4R_0^2} \right) \sin(\Delta\phi) \right] \\ &\quad + \frac{p_0}{p} \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta}} \left(\cos(\Delta\phi) + \frac{\beta'}{2R_0} \sin(\Delta\phi) \right). \end{aligned}$$

Введя векторы

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ p_x/p \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

мы можем переписать полученные формулы в виде

$$\mathbf{x}(\theta) = \mathbf{M}(\theta, \theta_{in}) \mathbf{x}(\theta_{in}), \quad (1.13)$$

где \mathbf{M} – матрица, переводящая решение из точки θ_{in} в точку θ

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}, \quad (1.14)$$

а

$$\begin{aligned}
M_{11} &= \sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}} \left(\cos(\Delta\phi) - \frac{\beta'_0}{2R_0} \sin(\Delta\phi) \right), \quad M_{12} = \sqrt{\beta\beta_0} \sin(\Delta\phi), \\
M_{21} &= \frac{1}{\sqrt{\beta\beta_0}} \left[\frac{\beta' - \beta'_0}{2R_0} \cos(\Delta\phi) - \left(1 + \frac{\beta'\beta'_0}{4R_0^2} \right) \sin(\Delta\phi) \right], \\
M_{22} &= \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta}} \left(\cos(\Delta\phi) + \frac{\beta'}{2R_0} \sin(\Delta\phi) \right).
\end{aligned}$$

Эти выражения существенно упрощаются для перехода, в котором величины θ и θ_{in} отличаются на период магнитной структуры θ_0 , когда $\beta(\theta_0 + \theta_{in}) = \beta(\theta_{in}) = \beta_0$. Для этого случая полагают $\Delta\phi = \mu$ и соответственно пишут

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cos \mu - \frac{\beta'_0}{2R_0} \sin \mu, & \beta_0 \sin \mu \\ -\frac{1 + \beta_0'^2/(4R_0^2)}{\beta_0} \sin \mu, & \cos \mu + \frac{\beta'_0}{2R_0} \sin \mu \end{bmatrix}. \quad (1.15)$$

Поскольку $\mathbf{M}(\theta, \theta')$ осуществляет каноническое преобразование точки $\mathbf{x}(\theta_{in})$ в точку $\mathbf{x}(\theta)$, то $|\mathbf{M}| \equiv \text{Det}\mathbf{M} = 1$. Кроме того, по определению,

$$\mathbf{M}(\theta_2 + \theta_1, \theta) = \mathbf{M}(\theta_2, \theta_1)\mathbf{M}(\theta_1, \theta), \quad \mathbf{M}^{-1}(\theta, \theta') = \mathbf{M}(\theta', \theta).$$

Аналогичным образом строятся матрицы преобразований многомерных линейных колебаний. Если такие колебания не связаны, то полная матрица \mathbf{M} имеет блочно-диагональную структуру.

1.2. Связанные колебания

Для одномерных колебаний преимущества использования гамильтонова формализма могут показаться не столь яркими. Однако уже анализ линейных связанных колебаний частиц демонстрирует значительные вычислительные упрощения, которые появляются благодаря применению такого подхода.

В качестве иллюстрации проведем вычисления частот бетатронных колебаний с линейной $x - z$ -связью. Сначала заметим, что уравнения (1.5) можно переписать с использованием следующих матричных обозначений:

$$\begin{pmatrix} x \\ p_x \end{pmatrix}' = u \begin{pmatrix} \partial h / \partial x \\ \partial h / \partial p_x \end{pmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.16)$$

Для связанных колебаний определим вектор

$$X = \begin{pmatrix} x \\ p_x \\ z \\ p_z \end{pmatrix}.$$

Если система гамильтонова, то уравнения движения записываются аналогично уравнениям (1.16)

$$X' = U \begin{pmatrix} \partial h / \partial x \\ \partial h / \partial p_x \\ \partial h / \partial z \\ \partial h / \partial p_z \end{pmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}. \quad (1.17)$$

Для линейных колебаний вектор градиентов в правой части системы (1.17) записывается в виде

$$\begin{pmatrix} \partial h / \partial x \\ \partial h / \partial p_x \\ \partial h / \partial z \\ \partial h / \partial p_z \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x \\ p_x \\ z \\ p_z \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

где матрица Q определена согласно $Q_{\alpha,\beta} = \partial^2 h / \partial X_\alpha \partial X_\beta$ и потому является симметричной ($Q_{\alpha,\beta} = Q_{\beta,\alpha}$). Теперь поскольку

$$X' = UQX, \quad (X^T)' = X^T Q^T U^T,$$

а $U^T = -U$ и $U^2 = -I$, то уравнения (1.17) имеют интеграл движения

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta}(X^T U X) &= (X^T)' U X + X^T U X' \\ &= X^T Q^T U^T U X + X^T U U Q X \\ &= X^T Q^T X - X^T Q X = 0.\end{aligned}\quad (1.19)$$

Преобразование вектора X вдоль орбиты описывается матрицей M :

$$X(\theta) = M X_0.$$

В силу закона сохранения (1.19):

$$X^T U X = X_0^T M^T U M X_0,$$

возможные матрицы преобразования гамильтоновых систем должны удовлетворять так называемому условию симплектичности:

$$M^T U M = U. \quad (1.20)$$

Частоты бетатронных колебаний определяются собственными числами уравнения

$$\lambda X = M X, \quad (1.21)$$

где M —матрица преобразования на период магнитной системы кольца. Используя соотношение $M^{-1} = -U M^T U$ и обозначив $\cos \mu = \lambda + 1/\lambda$, запишем

$$2 \cos \mu X = [M - U M^T U] X. \quad (1.22)$$

Обозначив

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

и (такая матрица называется присоединенной $(-A)$),

$$A_u = u A^T u = \begin{bmatrix} -a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{bmatrix}, \quad (1.23)$$

перепишем уравнение (1.22) в виде

$$2 \cos \mu X = \begin{bmatrix} \text{Sp}(A)I & B - C_u \\ C - B_u & \text{Sp}(D)I \end{bmatrix} X, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.24)$$

где было использовано соотношение $A - A_u = \text{Sp}(A)I$. Возвращаясь к 2-мерным переменным

$$X = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix},$$

пишем ($\cos \mu_x = \text{Sp}(A)/2$, $\cos \mu_z = \text{Sp}(D)/2$),

$$\begin{aligned} 2(\cos \mu - \cos \mu_x)\mathbf{x} &= (B - C_u)\mathbf{z}, \\ 2(\cos \mu - \cos \mu_z)\mathbf{z} &= (C - B_u)\mathbf{x} \end{aligned}$$

или

$$(\cos \mu - \cos \mu_x)(\cos \mu - \cos \mu_z)\mathbf{x} = \frac{(B - C_u)(C - B_u)\mathbf{x}}{4}.$$

Используя соотношения $A_u A = -|A|I$, а также условие симплектичности (1.20), находим

$$|A| = |D| = 1 - |C|, \quad |C| = |B|, \quad B = \frac{1}{|A|} A C_u D$$

и

$$BC + C_u B_u - C_u C - B B_u = QI, \quad Q = (2|C| + \text{Sp}(BC)).$$

Значение $\cos \mu$ находится решением квадратного уравнения

$$(\cos \mu - \cos \mu_x)(\cos \mu - \cos \mu_z) = \frac{Q}{4}, \quad (1.25)$$

корни которого определяются выражением

$$\cos \mu = \frac{\cos \mu_z + \cos \mu_x}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\cos \mu_z - \cos \mu_x)^2 + Q}. \quad (1.26)$$

Согласно этому соотношению, влияние связи колебаний на движение частицы характеризуется параметром

$$\Lambda = \frac{Q}{(\cos \mu_z - \cos \mu_x)^2}, \quad (1.27)$$

величина которого существенно возрастает при приближении частот колебаний к резонансным значениям

$$\mu_x \pm \mu_z = 2\pi k, \quad (1.28)$$

где k – целое. В случае знака «плюс» реализуется условие суммового резонанса, в случае знака «минус» – разностного.

2. ВОЗМУЩЕНИЯ БЕТАТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ

2.1. Теорема Лиувилля

Гамильтоновость уравнений, описывающих невозмущенные колебания частиц, существенно упрощает анализ действия возмущающих полей. Положим, например, что возмущения радиальных колебаний описываются силой F_x . Тогда полная система уравнений (1.5) записывается в виде

$$x' = \frac{\partial h}{\partial p_x}, \quad p'_x = -\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{F_x}{\omega_0}, \quad (2.1)$$

где ω_0 – частота обращения частицы. Для получения уравнений в переменных действие – фаза пишем

$$I' = \frac{\partial I}{\partial x} x' + \frac{\partial I}{\partial p_x} p'_x = [h; I] + \frac{\partial I}{\partial p_x} \frac{F_x}{\omega_0}. \quad (2.2)$$

Учитывая, что I является интегралом движения невозмущенных колебаний ($[h; I] = 0$), а также то, что $\partial I / \partial p_x = [I, x] = \partial x / \partial \psi$, перепишем уравнение (2.2) в виде

$$I' = \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{F_x}{\omega_0}.$$

Аналогичным образом получим ($I = pJ/2$)

$$\psi' = \nu + \frac{\partial \psi}{\partial p_x} \frac{F_x}{\omega_0} = \nu - \frac{\partial x}{\partial J} \frac{2R_0}{pv} F_x.$$

Таким образом, в переменных действие – фаза уравнения (2.1) записываются в виде

$$J' = \frac{2R_0}{pv} \frac{\partial x}{\partial \psi} F_x, \quad \psi' = \nu - \frac{2R_0}{pv} \frac{\partial x}{\partial J} F_x. \quad (2.3)$$

Если сила \mathbf{F} имеет потенциал $\mathbf{F} = -\partial U / \partial \mathbf{r}$, то, поскольку

$$\frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial x}{\partial J} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial J},$$

уравнения (2.3) еще больше упрощаются

$$J' = -\frac{2R_0}{pv} \frac{\partial U}{\partial \psi}, \quad \psi' = \nu + \frac{2R_0}{pv} \frac{\partial U}{\partial J}. \quad (2.4)$$

В этом случае возмущенные колебания описываются гамильтонианом

$$h = \nu J + \frac{2R_0}{pv} U(I, \psi, \theta). \quad (2.5)$$

Вообще, решения уравнений движения определяют некоторое преобразование начальных условий в мгновенную точку фазового пространства. Для гамильтоновой системы такое преобразование является каноническим. Это означает, что якобиан преобразования начальных координат частиц в фазовом пространстве в мгновенные равен единице. При этом фазовый объем пучка сохраняется (теорема Лиувилля). Действительно, если $\mathbf{r}_a^{(0)}$ и $\mathbf{p}_a^{(0)}$ – начальные, а \mathbf{r}_a и \mathbf{p}_a – мгновенные значения координат частиц в фазовом пространстве, то величина фазового объема пучка определяется выражением

$$\begin{aligned} \Delta\Gamma(\theta) &= \int d^3r_1 d^3p_1 \dots d^3r_N d^3p_N \\ &= \int d^3r_1^{(0)} d^3p_1^{(0)} \dots d^3r_N^{(0)} d^3p_N^{(0)} |D(\theta)|, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где посредством $D(\theta)$ обозначен якобиан преобразования:

$$D = \frac{D(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N)}{D(\mathbf{r}_1^{(0)}, \mathbf{p}_1^{(0)}, \dots, \mathbf{r}_N^{(0)}, \mathbf{p}_N^{(0)})}. \quad (2.7)$$

Поскольку число координат в фазовом пространстве четное, D равно сумме произведений скобок Пуассона. Для одномерного движения это очевидно:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial p}{\partial x_0} \\ \frac{\partial x}{\partial p_0} & \frac{\partial p}{\partial p_0} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial x_0} \frac{\partial p}{\partial p_0} - \frac{\partial p}{\partial x_0} \frac{\partial x}{\partial p_0} = -[p, x].$$

Для двумерного (x, p, z, q) вычисление определителя

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial p}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial q}{\partial x_0} \\ \frac{\partial x}{\partial p_0} & \frac{\partial p}{\partial p_0} & \frac{\partial z}{\partial p_0} & \frac{\partial q}{\partial p_0} \\ \frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial p_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} & \frac{\partial z}{\partial q_0} \\ \frac{\partial z}{\partial p_0} & \frac{\partial z}{\partial q_0} & \frac{\partial z}{\partial q_0} & \frac{\partial z}{\partial q_0} \end{vmatrix} \quad (2.8)$$

приводит к результату

$$D = [p, x][q, z] - [p, z][q, x] + [x, z][q, p], \quad (2.9)$$

где, например,

$$[p, x] = \frac{\partial p}{\partial p_0} \frac{\partial x}{\partial x_0} - \frac{\partial p}{\partial x_0} \frac{\partial x}{\partial p_0} + \frac{\partial p}{\partial q_0} \frac{\partial x}{\partial z_0} - \frac{\partial p}{\partial z_0} \frac{\partial x}{\partial q_0}.$$

Видно, что слагаемые в формуле (2.9) получаются перемножением сумм 2×2 якобианов из двух соседних пар столбцов D , например, x, p и z, q . Знаки слагаемых в D зависят от четности числа перестановок требуемых для образования нужных пар колонок.

Более сложные якобианы определяются выражением аналогичным формуле (2.9):

$$D = \sum_P \operatorname{sgn}_P \prod_{\alpha_i, \alpha_k=1}^{3N} [X_{\alpha_i}, X_{\alpha_k}], \quad (2.10)$$

где $X_\alpha = (x_\alpha, p_\alpha)$ – координаты частиц в фазовом пространстве, $\operatorname{sgn}_P = \pm 1$ в зависимости от четности упоминавшихся перестановок, а суммирование идет по всем перестановкам пар. Для канонически сопряженных переменных скобки Пуассона равны

$$[p_\alpha, x_\beta] = \delta_{\alpha, \beta}, \quad [x_\alpha, x_\beta] = [p_\alpha, p_\beta] = 0,$$

где $\alpha, \beta = 1, \dots, 3N$ нумеруют как степени свободы, так и частицы в пучке. Отсюда находим $|D| = 1$, что и доказывает утверждение.

Другой способ доказательства этой теоремы основан на замечании о том, что матрица бесконечно малого преобразования $(X_k^{(0)} \rightarrow X_k^{(0)} + \delta X_k^{(0)})$ вдоль фазовой траектории гамильтоновой системы

$$\delta X_k = \sum_{l=1}^{2N} M_{kl} \delta X_l^{(0)}, \quad M_{kl} = \frac{\partial X_k}{\partial X_l^{(0)}}$$

симплектична. Детерминант этой матрицы равен D . Используя условие симплектичности M , получаем $|D| = 1$.

В негамильтоновых системах, например,

$$x'_\alpha = \frac{\partial h}{\partial p_\alpha}, \quad p'_\alpha = - \sum_{\beta=1}^{3N} \lambda_{\alpha\beta} p_\beta - \frac{\partial h}{\partial x_\alpha} \quad (2.11)$$

фазовый объем не сохраняется. Скорость изменения D во времени определяется негамильтоновой частью силы и по правилу дифференцирования определителей равна

$$D' = - \left(\sum_{\alpha=1}^{3N} \lambda_{\alpha\alpha} \right) D(\theta)$$

или

$$\frac{d \ln \Gamma(\theta)}{d\theta} = - \sum_{\alpha=1}^{3N} \lambda_{\alpha\alpha}. \quad (2.12)$$

Таким образом, логарифмическая скорость изменения фазового объема во времени равна сумме декрементов частиц пучка, взятой с обратным знаком. В случае несвязанных колебаний фазовый объем пучка равен произведению парциальных фазовых объемов, т. е. фазовых объемов колебаний отдельных частиц по отдельным степеням свободы. Если силы трения линейно зависят от координат частиц в фазовом пространстве, то сумма декрементов является инвариантом ортогональных преобразований этих координат. Отсюда следует, что если сумма декрементов отрицательна, то никакие линейные связи колебаний частиц не могут привести к одновременному затуханию парциальных фазовых объемов пучка. Последнее утверждение носит название теоремы о сумме декрементов колебаний.

2.2. Метод усреднения

В большинстве представляющих интерес случаев ни уравнения (2.3), ни уравнения (2.4) не могут быть решены в общем виде. Поэтому если не ограничиваться численными решениями, то исследование таких уравнений требует применения теории возмущений. Во многих случаях это оправдано еще и тем, что воздействие возмущений на колебания мало само по себе. Особенностью движения частиц в ускорителе является периодичность прохождения частицами участка орбиты, содержащего возмущение. По этой причине возмущающая сила или ее потенциал являются периодическими функциями азимута θ и фаз колебаний ψ . Это обстоятельство делает естественным применение в качестве теории возмущений метода усреднения [2].

Суть метода усреднения состоит в следующем. Полагая, что возмущение F_x мало (например, $F_x \sim \epsilon$, $|\epsilon| \ll 1$), ищем решения

уравнений (2.3) в виде рядов по степеням ϵ :

$$\begin{aligned} J(\theta) &= J_0 + J_1 + \dots, & J'_0 &= 0, \\ \psi(\theta) &= \nu\theta + \psi_0 + \psi_1 + \dots, & \psi'_0 &= 0. \end{aligned}$$

Из уравнений (2.3) получим уравнения первого приближения

$$\begin{aligned} J'_1 &= -\frac{2R_0}{pv} \sqrt{J_0\beta} \sin \phi F_x(J_0, \nu\theta + \psi_0, \theta), & (2.13) \\ \psi'_1 &= -\frac{2R_0}{pv} \sqrt{\frac{\beta}{J_0}} \cos \phi F_x(J_0, \nu\theta + \psi_0, \theta). \end{aligned}$$

Здесь $\phi = \psi + \chi(\theta)$. Изменение, например, J_1 в первом приближении по ϵ можно оценить, если проинтегрировать первое уравнение системы (2.13) по азимуту. Для этого правую часть уравнения удобно представить рядом Фурье

$$\begin{aligned} V(J_0, \theta) &= \frac{2R_0}{pv} \sqrt{J_0\beta} \sin \phi F_x(J_0, \nu\theta + \psi_0, \theta) & (2.14) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_{m,n} e^{i(m\nu-n)\theta + im\psi_0}. \end{aligned}$$

Тогда результат интегрирования записывается в виде

$$\Delta J_1(\theta) = - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{im\psi_0} V_{m,n}(J_0) \frac{e^{i\theta[m\nu-n]} - 1}{i[m\nu - n]}. \quad (2.15)$$

Из последнего выражения видно, что если ряд в формуле (2.15) не содержит нулевых $m = 0$ и $n = 0$, а также резонансных $m\nu = n$ гармоник, то изменение J за счет возмущения сведется к малым биениям J вокруг среднего значения $\langle J \rangle = J_0$. Как видно из выражения (2.14), гармоника с $m = 0$ может появиться в правой части формулы (2.15) только для сил трения, когда $F_x^{(-)} = [F_x(x, p_x, \theta) - F_x(x, -p_x, \theta)] \neq 0$. Для гамильтоновых сил ($F_x^{(-)} = 0$) такая гармоника равна нулю, а систематическое изменение J возможно лишь за счет резонансных слагаемых.

Точно так же систематическое изменение ψ_1 определяется медленными слагаемыми разложения

$$\begin{aligned} Q &= \frac{2R_0}{pv} \sqrt{\frac{\beta}{J_0}} \cos \phi F_x(J_0, \nu\theta + \psi_1, \theta) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_{m,n} e^{i(m\nu-n)\theta + im\psi_1}. \end{aligned}$$

Это выражение содержит нулевую гармонику $m = 0$, если для произвольных x выполнено соотношение $F_x(x, p_x, \theta) - F_x(-x, p_x, \theta) \neq 0$. Для гамильтоновых сил и в нерезонансном случае это единственное медленное слагаемое в правых частях уравнений (2.13). Выделение таких медленных слагаемых осуществляется усреднением правых частей уравнений (2.13) по достаточно протяженному интервалу времени. В результате приходим к уравнениям

$$J' = 0, \quad \psi' = \nu - Q_{0,0}(J), \quad (2.16)$$

где

$$Q_{0,0} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta d\psi}{(2\pi)^2} Q(J, \psi, \theta).$$

Полученные уравнения описывают влияние нерезонансных возмущений на движения частиц в первом приближении метода усреднения. Видно, что в этом случае возмущение приводит лишь к сдвигам частот колебаний на величину $\Delta\nu = Q_{0,0}(J)$.

Другой важный класс медленных слагаемых в правых частях уравнений (2.13) появляется в том случае, когда частоты колебаний частиц приближаются к резонансным значениям. В простейшем случае одномерного резонанса это $\nu = n/m$. Если расстройка $\varepsilon = \nu - (n/m)$ мала, то в правых частях уравнений (2.13) будут быстроосциллирующими все слагаемые, за исключением гармоник (m, n) и $(-m, -n)$. Для выделения систематических изменений амплитуд и фаз колебаний правые части уравнений (2.13) усредняют по интервалу времени такому, что

$$1/\nu < \Delta\theta < 1/\varepsilon.$$

Результатом являются уравнения

$$\begin{aligned} J' &= -V_{0,0}(J) - 2|V_{m,n}|\sin(m\psi - n\theta + \arg V_{m,n}), \\ \psi' &= \nu - Q_{0,0}(J) - 2|Q_{m,n}|\cos(m\psi - n\theta + \arg V_{m,n}). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Определив теперь медленную фазу колебаний, например, соотношением $w = \psi - (n/m)\theta + \arg V_{m,n}$, получим уравнения первого приближения метода усреднения:

$$\begin{aligned} J' &= -V_{0,0}(J) - 2|V_{m,n}|\sin(mw), \\ w' &= \varepsilon - Q_{0,0}(J) - 2|Q_{m,n}|\cos(mw). \end{aligned} \quad (2.18)$$

В случае гамильтоновых сил ($V_{0,0} = 0$, $V_{m,n} = mQ_{m,n}$) система (2.18) получается с помощью гамильтониана

$$\mathcal{H} = \int_0^{\Delta\theta} \frac{d\theta}{\Delta\theta} h = \varepsilon J - \int dJ(Q_{0,0} + 2|Q_{m,n}|\cos mw), \quad (2.19)$$

который к тому же является интегралом движения. Величины $Q_{m,n}$ определяют насколько сильным является резонансное возмущение, т. е. мощности резонансов. Заметим, что для гамильтоновой системы процедуре усреднения можно сопоставить каноническое преобразование. Так, если $h = \mathcal{H} + \Delta h$ есть мгновенный гамильтониан системы, то производящая функция такого преобразования S находится решением уравнения

$$\Delta h + \frac{\partial S}{\partial \theta} = 0.$$

Аналогичным образом получают уравнения первого приближения метода усреднения для многомерного случая. Например, вблизи резонанса связи $m_x\nu_x + m_z\nu_z = n$ медленной фазой будет величина $w = m_x\psi_x + m_z\psi_z - n\theta$. В случае гамильтоновых сил это приводит к сохранению еще одной величины

$$C_m = \frac{J_x}{m_x} - \frac{J_z}{m_z}. \quad (2.20)$$

Поэтому вблизи суммового резонанса $m_x m_z > 0$ рост одной из амплитуд вызывает и рост второй, а вблизи разностного резонанса $m_x m_z < 0$ рост одной из амплитуд вызывает убывание второй.

3. СДВИГИ ЧАСТОТ

Как уже говорилось, в первом приближении метода усреднения сдвиги частот колебаний определяются формулой (2.16). В тех случаях, когда среднее значение Q равно нулю, для вычисления сдвигов частот колебаний следует воспользоваться следующими приближениями метода усреднения. Такой расчет полезен еще и тем, что позволяет выяснить величины поправок к результатам, полученным в первом приближении. Для определенности считаем, что движение описывается следующим гамильтонианом:

$$h = \nu_x I_x + \nu_z I_z + V(I_x, \psi_x, I_z, \psi_z, \theta). \quad (3.1)$$

Тогда точные уравнения движения записываются в виде

$$I'_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial \psi_\alpha}, \quad \psi'_\alpha = \nu_\alpha + \frac{\partial V}{\partial I_\alpha}, \quad \alpha = x, z, \quad (3.2)$$

где ν_α – частоты невозмущенных колебаний. Как и прежде, пишем

$$I_\alpha = I_{0\alpha} + I_{1\alpha} + \dots, \quad \psi_\alpha = \psi_{0\alpha} + \psi_1 + \psi_{2\alpha} + \dots \quad (3.3)$$

Здесь $I'_{0\alpha} = 0$, а $\psi'_{0\alpha} = \nu_\alpha$. Уравнения первого приближения получаются, если мы заменим в правых частях уравнений (3.2) переменные действие – фаза их невозмущенными значениями:

$$I'_{1\alpha} = -\frac{\partial V(I_{0x}, \psi_{0x}, I_{0z}, \psi_{0z}, \theta)}{\partial \psi_{0\alpha}}, \quad (3.4)$$

$$\psi'_{1\alpha} = \frac{\partial V(I_{0x}, \psi_{0x}, I_{0z}, \psi_{0z}, \theta)}{\partial I_{0\alpha}}, \quad (3.5)$$

а затем усредним правые части этих уравнений по времени. В нерезонансном случае усреднение по времени эквивалентно раздельному усреднению правых частей уравнений движения по фазам невозмущенных колебаний и по азимуту частицы. В результате усреднение первого уравнения дает нуль, а второго – сдвиги частот колебаний первого приближения:

$$\psi'_{1\alpha} = \Delta\nu_{1\alpha} = \frac{\partial V_{0,0}(I_{0x}, I_{0z})}{\partial I_{0\alpha}}. \quad (3.6)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (2.16). Для нахождения сдвига частоты в следующем приближении считаем, что величины $\Delta\nu_{1\alpha}$ уже включены в частоты ν_α . Далее, пишем

$$I_{1\alpha} = I_{1\alpha}(I_{0x}, \psi_{0x}, I_{0z}, \psi_{0z}, \theta), \quad \psi_{1\alpha} = \psi_{1\alpha}(I_{0x}, \psi_{0x}, I_{0z}, \psi_{0z}, \theta).$$

При этом, например, уравнение (3.4) преобразуется в следующее:

$$\frac{\partial I_{1\alpha}}{\partial \theta} + \nu_\alpha \frac{\partial I_{1\alpha}}{\partial \psi_{0\alpha}} = -i \sum_{m,n} m_\alpha V_{mn} \exp(im_\alpha \psi_{0\alpha} + in\theta). \quad (3.7)$$

Поскольку правая часть этого уравнения является периодической функцией фаз невозмущенных колебаний и азимута, ищем решение в виде (начальные значения $I_{1,\alpha}$ для дальнейшего не существенны и потому не прослеживаются)

$$\begin{aligned} I_{1\beta} &= \sum_{m,n} I_{mn} \exp(im_\alpha \psi_{0\alpha} + in\theta) \\ &= - \sum_{m,n} \frac{m_\beta V_{mn} \exp(im_\alpha \psi_{0\alpha} + in\theta)}{m_\alpha \nu_\alpha + n}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Суммирование в правой части этого уравнения не должно затрагивать резонансных гармоник. Аналогичным образом вычисляем $\psi_{1,\alpha}$:

$$\psi_{1\alpha} = \sum_{m,n} \frac{\partial V_{mn}}{\partial I_{0\alpha}} \frac{\exp(im_\alpha \psi_{0\alpha} + in\theta)}{i(m_\alpha \nu_\alpha + n)}. \quad (3.9)$$

Поправки к сдвигам частот колебаний в втором приближении получаются усреднением правых частей уравнений:

$$\psi'_{2,\alpha} = \sum_{\beta} \frac{\partial^2 V}{\partial I_{0\alpha} \partial I_{0\beta}} I_{1\beta} + \frac{\partial^2 V}{\partial I_{0\alpha} \partial \psi_{0\beta}} \psi_{1\beta}.$$

Они получают подстановкой в левые части уравнений (3.2) величин

$$I_\alpha = I_{0,\alpha} + I_{1,\alpha}, \quad \psi_\alpha = \psi_{0,\alpha} + \psi_{1,\alpha}$$

и разложением правых частей этих уравнений в ряды по степеням I_1 и ψ_1 с удержанием старших членов таких рядов. Поскольку мы рассматриваем нерезонансный случай, усреднение полученных уравнений может проводиться порознь по фазам колебаний и по азимуту. В результате получим

$$\begin{aligned} \langle \psi'_{2\alpha} \rangle &= \Delta\nu_{2\alpha} = \left\langle \sum_{\beta} \frac{\partial^2 V}{\partial I_{0\alpha} \partial I_{0\beta}} I_{1\beta} + \frac{\partial^2 V}{\partial I_{0\alpha} \partial \psi_{0\beta}} \psi_{1\beta} \right\rangle \\ &= - \sum_{\beta} \sum_{m,n} \frac{m_{\beta}}{m_{\alpha} \nu_{\alpha} + n} \left[V_{mn}^* \frac{\partial^2 V_{mn}}{\partial I_{0\alpha} \partial I_{0\beta}} + \frac{\partial V_{mn}}{\partial I_{0\alpha}} \frac{\partial V_{mn}^*}{\partial I_{0\beta}} \right] \end{aligned}$$

или

$$\Delta\nu_{2\alpha} = - \sum_{\beta} \sum_{m,n} \frac{m_{\beta}}{m_{\alpha} \nu_{\alpha} + n} \frac{\partial}{\partial I_{0\alpha}} \left[V_{mn}^* \frac{\partial V_{mn}}{\partial I_{0\beta}} \right]. \quad (3.10)$$

В приведенных вычислениях мы явно учитывали предположение о малости поправок следующих приближений по сравнению с уже полученными. При приближении частот колебаний к резонансным значениям это предположение нарушается. Как уже обсуждалось, при вычислении I_1 и ψ_1 такие гармоники должны учитываться отдельно. При вычислении сумм в формуле (3.10) они должны быть исключены.

В общем случае сдвиги частот зависят от амплитуд колебаний частиц. В свою очередь, это приводит к нерезонансной связи колебаний различных степеней свободы частиц. По этой причине, например, точечное резонансное условие в пространстве частот колебаний, скажем $\nu_z = n/m$, в пространстве амплитуд колебаний может преобразовываться в линию или поверхность. Для иллюстрации примем, что $\nu_z = \nu_{z0} + \Delta\nu_z(I_x, I_z)$. Если определить расстройку от резонанса величиной $\varepsilon = \nu_{z0} - (n/m)$, то в пространстве амплитуд колебаний условие резонанса выполнено вдоль кривой

$$\Delta\nu_z(I_x, I_z) = -\varepsilon. \quad (3.11)$$

Вообще, для того чтобы точечные резонансные условия в пространстве частот колебаний переходили в точечные резонансные

условия в пространстве амплитуд, необходимо, чтобы размерность зависимости сдвигов частот от амплитуд совпадала с размерностью резонанса. Далее мы вычислим сдвиги частот бетатронных колебаний для некоторых типичных возмущений.

3.1. Секступоли

Одним из распространенных элементов фокусирующих систем современных ускорителей и накопителей являются секступольные линзы. В некраевых областях поперечные магнитные поля в таких элементах описываются выражениями

$$H_z = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} (x^2 - z^2), \quad H_x = \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} xz, \quad (3.12)$$

а воздействие их на частицы определяется следующими компонентами силы Лоренца:

$$F_x = \frac{ev}{c} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} (x^2 - z^2), \quad F_z = -\frac{ev}{c} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} xz. \quad (3.13)$$

Такая сила имеет потенциал

$$F_{x,z} = -\frac{\partial U}{\partial(x,z)}, \quad U(x,z) = -\frac{ev}{c} \frac{1}{6} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} (x^3 - 3xz^2). \quad (3.14)$$

Соответственно гамильтониан (2.5) записывается в виде

$$\mathcal{H} = \nu J - \frac{e}{pc} \frac{R_0}{3} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} (x^3 - 3xz^2). \quad (3.15)$$

Поскольку это выражение нечетно по x , в первом порядке теории возмущений оно не дает вклада в сдвиги частот бетатронных колебаний синхронных частиц.

Для несинхронных частиц ($p \rightarrow p + \Delta p$) радиальные колебания совершаются относительно замкнутой орбиты, описываемой дисперсионной функцией кольца

$$x = x_b + \eta \frac{\Delta p}{p}, \quad \eta(\theta + \theta_0) = \eta(\theta), \quad x_b = \sqrt{J\beta} \cos \phi. \quad (3.16)$$

Для таких частиц и в линейном приближении по $\Delta p/p$ правая часть формулы (3.15) записывается в виде

$$\mathcal{H} = \nu J - \frac{e}{pc} \frac{R_0}{3} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} \left(x_b^3 - 3x_b z^2 + 3\eta \frac{\Delta p}{p} [x_b^2 - z^2] \right). \quad (3.17)$$

Усреднение этого выражения по фазам бетатронных колебаний и азимуту приводит к следующим выражениям для сдвигов частот:

$$\Delta\nu_{x,z} = \mp \frac{R_0 e}{2pc} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} \beta_{x,z}(\theta) \eta(\theta). \quad (3.18)$$

Зависимость частот колебаний от энергии частиц называется хроматизмом фокусировки. Поскольку угол поворота в магнитном поле убывает с ростом энергии частиц, в отсутствие специальных мер частоты колебаний частиц уменьшаются с увеличением их энергии (естественный хроматизм фокусировки отрицателен). Частицы с неравновесной энергией ($p + \Delta p$) осциллируют относительно орбит, радиальное положение которых зависит от энергии частиц. При размещении на орбите секступолей градиенты, определяющие фокусировку, также зависят от энергии. Это приводит к изменению хроматизма фокусировки, описываемому формулами (3.18). Правильным размещением секступольных линз вдоль орбиты можно значительно уменьшить хроматизм кольца.

3.2. Второй порядок теории возмущений

Как уже упоминалось, в первом порядке теории возмущений секступольные линзы не изменяют частот бетатронных колебаний синхронных частиц. Однако в следующих приближениях такое изменение не равно нулю. Соответствующие сдвиги частот колебаний могут быть вычислены с использованием формулы (3.10). Для этого пишем

$$V = -\frac{b(x^3 - 3xz^2)}{3}, \quad b = \frac{eR_0}{2c} \left(\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} \right)_0 \quad (3.19)$$

или

$$\begin{aligned}
V &= -\frac{b}{3} \left[(J_x \beta_x)^{3/2} \cos^3 \phi_x - 3\sqrt{J_x \beta_x} J_z \beta_z \cos \phi_x \cos^2 \phi_z \right] \\
&= -\frac{b}{12} (J_x \beta_x)^{3/2} \cos 3\phi_x - \frac{b\sqrt{J_x \beta_x} (J_x \beta_x - 2J_z \beta_z)}{4} \cos \phi_x \\
&\quad + \frac{b\sqrt{J_x \beta_x} J_z \beta_z}{4} [\cos(\phi_x - 2\phi_z) + \cos(\phi_x + 2\phi_z)].
\end{aligned}$$

Отличны от нуля следующие гармоники V по фазам бетатронных колебаний:

$$V_{\pm 1,0} = -\frac{b\sqrt{J_x \beta_x} (J_x \beta_x - 2J_z \beta_z)}{8} \exp(\pm i\chi_x[\theta]),$$

$$V_{\pm 3,0} = -\frac{b}{24} (J_x \beta_x)^{3/2} \exp(\pm i3\chi_x[\theta]),$$

$$V_{\pm 1,\mp 2} = \frac{b\sqrt{J_x \beta_x} J_z \beta_z}{8} \exp(\pm i\chi_x \mp 2i\chi_z)$$

и

$$V_{\pm 1,\pm 2} = \frac{b\sqrt{J_x \beta_x} J_z \beta_z}{8} \exp(\pm i\chi_x \pm 2i\chi_z).$$

Вычисления сдвигов частот упрощается в двух случаях. Примем сначала, что частица движется в машине с круговыми орбитами ($\beta_{x,z} = R_0/\nu_{x,z}$), а также, что величина квадратичной нелинейности поля постоянна вдоль орбиты. При этом $b_n = 0$, если $n \neq 0$. Согласно формуле (3.10), пишем

$$\begin{aligned}
\Delta\nu_{2x} &= -\sum_{m_x, m_z} \frac{1}{m_\alpha \nu_\alpha} \frac{\partial}{\partial I_{0\alpha}} \left[m_x V_{mn}^* \frac{\partial V_{mn}}{\partial I_{0x}} + m_z V_{mn}^* \frac{\partial V_{mn}}{\partial I_{0z}} \right] \\
&= -\frac{1}{\nu_x} \frac{\partial}{\partial I_{0x}} \left[\frac{\partial |V_{1,0}|^2}{\partial I_{0x}} + \frac{\partial |V_{3,0}|^2}{\partial I_{0x}} \right] \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial I_{0x}} \left\{ \frac{2}{2\nu_z + \nu_x} \frac{\partial |V_{1,2}|^2}{\partial I_{0z}} + \frac{2}{2\nu_z - \nu_x} \frac{\partial |V_{1,-2}|^2}{\partial I_{0z}} \right\}
\end{aligned}$$

или $(\partial/\partial I) = (2/p)(\partial/\partial J)$

$$\Delta\nu_{2x} = -\frac{\nu_z}{4\nu_z^2 - \nu_x^2} \frac{b^2\beta_x\beta_z^2}{p^2} J_{0z} - \frac{1}{p^2\nu_x} \left[\frac{5}{12} b^2\beta_x^3 J_{0x} - \frac{b^2\beta_x^2\beta_z}{2} J_{0z} \right].$$

Проведя здесь несложные преобразования, получим $(a_{x,z}^2 = J_{x,z}\beta_{x,z})$

$$\Delta\nu_{2x} = -\frac{b^2 R_0^2}{p^2} \left[\frac{5}{12} \frac{a_x^2}{\nu_x^3} + \frac{3\nu_x^2 - 4\nu_z^2}{(4\nu_z^2 - \nu_x^2)} \frac{a_z^2}{2\nu_x^2} \right], \quad (3.20)$$

где

$$\frac{b^2 R_0^2}{p^2} = \left[\frac{eR_0^2}{2pc} \left(\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} \right)_0 \right]^2. \quad (3.21)$$

Согласно полученному выражению, величина $\Delta\nu_{2,x}$ увеличивается при приближении к границе области устойчивости радиальных колебаний ($\nu_x = 0$) и при приближении частот колебаний к резонансу связи $2\nu_z = \nu_x$. Однако, как уже упоминалось, в этих областях частот использование полученных формул становится незаконным.

Для вертикальных колебаний после аналогичных вычислений

$$\begin{aligned} \frac{p^2 \Delta\nu_{2z}}{4} &= -\frac{1}{\nu_x} \frac{\partial^2 |V_{1,0}|^2}{\partial J_{0z} \partial J_{0x}} - \frac{8\nu_z}{4\nu_z^2 - \nu_x^2} \frac{\partial^2 |V_{1,2}|^2}{\partial J_{0z}^2} \\ &= \frac{b^2\beta_x\beta_z}{\nu_x 8} (J_{0x}\beta_x - J_{0z}\beta_z) \\ &\quad - \frac{\nu_z}{4\nu_z^2 - \nu_x^2} \frac{b^2\beta_x\beta_z^2}{4} J_{0x} \end{aligned}$$

получаем

$$\Delta\nu_{2z} = -\frac{b^2 R_0^2}{p^2} \left[\frac{a_z^2}{2\nu_z\nu_x^2} + \frac{3\nu_x^2 - 4\nu_z^2}{(4\nu_z^2 - \nu_x^2)} \frac{a_x^2}{2\nu_z\nu_x} \right]. \quad (3.22)$$

Как и вообще для гамильтоновых систем, выполняется соотношение

$$\frac{\partial \Delta\nu_{2,x}}{\partial J_{0,z}} = \frac{\partial \Delta\nu_{2,z}}{\partial J_{0,x}}. \quad (3.23)$$

Примем теперь, что секступольное поле на орбите сосредоточено в одиночной тонкой линзе. Тогда $b(\theta) = b\delta_T(\theta)$, а $b_n = b/(2\pi)$. При этом

$$\begin{aligned} p^2 \frac{\Delta\nu_{2x}}{4} = & - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\nu_x + n} \frac{\partial^2 |V_{1,0}|^2}{\partial J_{0x}^2} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{3}{3\nu_x + n} \frac{\partial^2 |V_{3,0}|^2}{\partial J_{0x}^2} \\ & - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{2\nu_z + \nu_x + n} \frac{\partial^2 |V_{1,2}|^2}{\partial J_{0x} \partial J_{0z}} \\ & - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{2\nu_z - \nu_x + n} \frac{\partial^2 |V_{1,-2}|^2}{\partial J_{0x} \partial J_{0z}}, \end{aligned}$$

Входящие в это выражение суммы по n вычисляются с помощью формулы

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\nu_x + n} = \pi \cot(\pi\nu_x).$$

В результате простых преобразований приходим к выражению

$$\Delta\nu_{2x} = A_{xx}a_x^2 + A_{xz}a_z^2, \quad (3.24)$$

где

$$\begin{aligned} A_{xx} = & -\frac{b^2\beta_x^2}{p^2 32\pi} [3 \cot(\pi\nu_x) + \cot(3\pi\nu_x)], \\ A_{x,z} = & -\frac{b^2\beta_x\beta_z}{p^2 16\pi} [\cot(\pi[2\nu_z + \nu_x]) + \cot(\pi[2\nu_z - \nu_x])] \\ & + \frac{b^2\beta_x\beta_z}{p^2 8\pi} \cot(\pi\nu_x). \end{aligned} \quad (3.25)$$

В этих формулах значения β -функций берутся в точке расположения секступоля. Вычисление $\Delta\nu_{2,z}$ проводится аналогично. В приведенном примере благодаря резкой зависимости секступольного поля от азимута сдвиги частот существенно зависят от набегов фаз невозмущенных колебаний на длине орбиты. Например,

если набег фазы радиальных колебаний равен π (что соответствует $\nu_x = 1/2$), то коэффициент A_{xx} обращается в нуль. При этом сдвиг частоты радиальных колебаний пропорционален квадрату амплитуды вертикальных колебаний частицы.

Как уже говорилось, при приближении частот колебаний частицы к резонансным значениям вклады резонансных гармоник (m_x , m_z и n) должны быть исключены из суммирования. При этом, например, если $\varepsilon = \nu - k$ – расстройка от соответствующего резонанса, то вклады нерезонансных гармоник в $\Delta\nu_{2,\alpha}$ будут определяться фактором, который получается заменой

$$\pi \cot(\pi\nu) \rightarrow \pi \cot(\pi\nu) - \frac{1}{\varepsilon},$$

устраняющей сингулярность в точке $\varepsilon = 0$.

3.3. Октуполи

В качестве другого характерного примера рассмотрим возмущение колебаний частиц октупольными линзами. В этом случае поперечные поля записываются в виде

$$H_z = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 H_z}{\partial x^3} (x^3 - 3xz^2), \quad H_x = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 H_z}{\partial x^3} (z^3 - 3x^2z), \quad (3.26)$$

а поперечные компоненты силы Лоренца получаются с помощью потенциала

$$F_{x,z} = -\frac{\partial U}{\partial(x,z)}, \quad U(x,z) = -\frac{ev}{c} \frac{1}{24} \frac{\partial^3 H_z}{\partial x^3} (x^4 - 6x^2z^2 + z^4). \quad (3.27)$$

Это дает следующее выражение для гамильтониана \mathcal{H} :

$$\mathcal{H} = \nu_x J_x + \nu_z J_z - \frac{2R_0 e}{24pc} \frac{\partial^3 H_z}{\partial x^3} (x^4 - 6x^2z^2 + z^4).$$

Усреднение этого выражения по фазам бетатронных колебаний

$$\overline{x^4} = J_x^2 \beta_x^2 \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi} \cos^4 \psi = \frac{3}{8} J_x^2 \beta_x^2, \quad \overline{x^2} = \frac{J_x \beta_x}{2}$$

и азимуту приводит к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}} &= \nu_x J_x + \nu_z J_z \\ &- \frac{R_0 e}{16pc} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{\partial^3 H_z}{\partial x^3} \left(\frac{J_x^2 \beta_x^2 + J_z^2 \beta_z^2}{2} - 2J_x J_z \beta_x \beta_z \right). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Дифференцируя $\bar{\mathcal{H}}$ по $J_{x,z}$, получаем следующие выражения для сдвигов частот:

$$\Delta\nu_x = a_x J_x - b J_z, \quad \Delta\nu_z = a_z J_z - b J_x, \quad (3.29)$$

где

$$\begin{aligned} a_{x,z} &= -\frac{R_0 e}{16pc} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{\partial^3 H_z}{\partial x^3} \beta_{x,z}^2, \\ b &= -\frac{R_0 e}{8pc} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{\partial^3 H_z}{\partial x^3} \beta_x \beta_z. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Зависимость сдвига частоты от амплитуд вертикальных и радиальных колебаний позволяет ему принимать как положительные, так и отрицательные значения. Это обстоятельство важно в различных явлениях, связанных с резонансами колебаний частиц. Так, резонансное условие $\nu_z(J_x, J_z) = n/m$ переводит линию ν_z в плоскость J_x, J_z .

Расположение октуполей в местах с ненулевой дисперсионной функцией приводит к дополнительным изменениям хроматизма фокусировки. Поскольку

$$x = x_b + \eta \frac{\Delta p}{p}, \quad x^3 \simeq x_b^3 + 3x_b^2 \eta \frac{\Delta p}{p} + 3x_b \eta \left(\frac{\Delta p}{p} \right)^2,$$

первая поправка к сдвигу частоты пропорциональна $(\Delta p/p)^2$. Это обстоятельство используется для расширения области коррекции хроматизма фокусировки в машинах с большим энергетическим акцептансом.

4. ВНЕШНИЙ РЕЗОНАНС

Одним из распространенных видов измерений параметров пучков в накопителях является раскачка колебаний пучка и измерение его отклика на такое воздействие. Так или иначе в подобных экспериментах измеряются зависимости амплитуд или фаз вынужденных колебаний от частоты раскачки, т. е. резонансные кривые. В отсутствие на орбите нелинейных полей вычисление таких кривых весьма просто. Если действие на частицы нелинейных полей неустранимо, правильная интерпретация результатов измерений требует учета влияния нелинейности на измеряемые величины. Сходные задачи возникают при вычислении искажений орбиты и при изучении колебаний частиц вблизи искаженных орбит при наличии на орбите нелинейных полей.

Пусть движение частиц возмущается силой

$$F_z = \gamma M \omega_0^2 F_0 \delta_T(\theta) \cos \Omega t. \quad (4.1)$$

Здесь F_0 – амплитуда раскачки, а

$$\delta_T(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-in\theta}}{2\pi}$$

– периодическая δ - функция, Ω – частота раскачки. Возмущения колебаний частицы такой силой описываются гамильтонианом $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 - zF_z$, где слагаемое \mathcal{H}_0 описывает невозмущенные колебания частиц. Предполагая, что нелинейность колебаний может быть описана сдвигом частоты $\Delta\nu_z = aJ_z$, пишем $\mathcal{H}_0 = \nu_z J_z + aJ_z^2/2$ или (индекс z для краткости опускаем, в этом разделе $\mu = \Omega/\omega_0$)

$$\mathcal{H} = \nu J + \frac{aJ^2}{2} - F_0 \delta_T(\theta) \cos \mu\theta \sqrt{J\beta(\theta)} \cos[\psi + \chi(\theta)]. \quad (4.2)$$

Для получения уравнений в первом приближении метода усреднения мы должны отобрать в \mathcal{H} медленные слагаемые. Поскольку ($\phi = \psi + \chi(\theta)$)

$$\cos \mu\theta \cos \phi = \frac{1}{2} [\cos(\mu - \phi) + \cos(\mu + \phi)],$$

медленными будут гармоники с номерами, удовлетворяющими резонансным условиям

$$\omega_0\nu \pm \Omega = n\omega_0. \quad (4.3)$$

Если такие резонансы хорошо разделены по частотам, т. е. их ширины по частотам малы по сравнению с расстоянием до соседних резонансов, то исследование движения частиц можно проводить в приближении изолированного резонанса. Пусть, например, малой величиной является расстройка $\varepsilon = \nu - \mu - n$, $|\varepsilon| \ll 1$. Тогда усреднение гамильтониана \mathcal{H} по интервалу времени, соответствующему

$$1/\nu \ll \Delta\theta \ll 1/\varepsilon, \quad (4.4)$$

«занулит» в \mathcal{H} все гармоники частот обращения и частот бетатронных колебаний за исключением резонансных. После такого усреднения гамильтониан \mathcal{H} записывается в виде

$$\mathcal{H} = \varepsilon J + \frac{aJ^2}{2} + Q\sqrt{J} \cos(w). \quad (4.5)$$

Здесь $Q = |F_0\sqrt{\beta(0)}/\pi|$ – мощность резонанса, $w = \psi - (n + \mu)\theta + \arg(Q)$ – медленная фаза колебаний и принято, что $\chi(0) = 0$.

Гамильтониану (4.5) соответствуют уравнения движения

$$J' = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial w} = Q\sqrt{J} \sin(w), \quad w' = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial J} = \varepsilon + aJ + \frac{Q}{2\sqrt{J}} \cos(w), \quad (4.6)$$

решения которых определяют законы движения $J = J(\theta)$, $w = w(\theta)$ и траектории частиц на фазовой плоскости. Поскольку гамильтониан \mathcal{H} сохраняется, уравнения фазовых траекторий в неявной форме записываются в виде $\mathcal{H}(J, w) = C$.

4.1. Устойчивость колебаний

В действительности нас обычно интересуют не столько законы движения частиц, сколько условия устойчивости их колебаний, резонансные кривые и размеры области фазового пространства,

где могут находиться частицы. Большинство такой информации может быть получено без непосредственного решения уравнений (4.6). Для этого заметим, что если мы положим в уравнении (4.5) $\cos w = \pm 1$, то получим две кривые

$$\mathcal{H}_{\pm} = \varepsilon J + \frac{aJ^2}{2} \pm Q\sqrt{J}. \quad (4.7)$$

При движении вдоль фазовой траектории ($\mathcal{H}(J, w) = C$) значе-

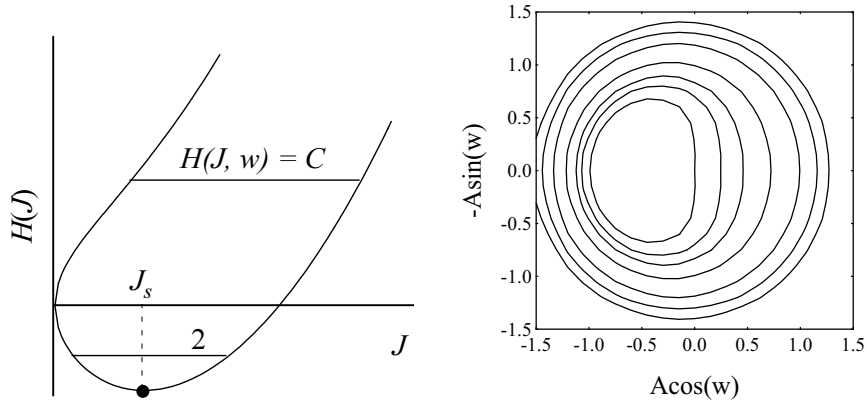


Рис. 1. Схематические зависимости гамильтонианов \mathcal{H}_{\pm} от действия частицы (J). Верхняя кривая \mathcal{H}_{+} , нижняя — \mathcal{H}_{-}

Рис. 2. Фазовые траектории в медленных переменных $x = A \cos(w)$, $p_x = -A \sin(w)$; $\varepsilon = 0$, $a = 2$

ние $\cos w$ изменяется в пределах, не превышающих ± 1 . Поэтому любая фазовая траектория изображается на диаграмме $\mathcal{H}_{+}(J)$, $\mathcal{H}_{-}(J)$ горизонтальной прямой (рис. 1). Характер этих кривых зависит от величины расстройки. Если $\varepsilon \geq 0$, то вид кривых $\mathcal{H}_{\pm}(J)$ близок к изображенному на рис. 1. При положительных величинах гамильтониана ($\mathcal{H} > 0$) любая горизонтальная прямая пересекает $\mathcal{H}_{+}(J)$ и $\mathcal{H}_{-}(J)$. Это означает, что фазовая переменная w непрерывно увеличивается, т. е. движение инфинитно по w (рис. 2). По J движение финитно всегда. Это связано либо с расстройкой от резонанса, либо с зависимостью частоты колебаний от

амплитуды, благодаря которой увеличение J выводит колебания частицы из резонанса. В области $\mathcal{H} \leq 0$ характер движения по w меняется. Поскольку $\varepsilon J + aJ^2/2 > 0$, ни одна горизонтальная кривая не пересекает гамильтонианов, соответствующих $\cos(w) > 0$. Это означает, что w колеблется с некоторой амплитудой возле значения $w = \pi$ (см. рис. 2). Как видно из уравнений (4.6), точки $w = 0$ и $w = \pi$, соответствующие гамильтонианам \mathcal{H}_{\pm} , являются точками остановки по J . Точки, соответствующие экстремумам \mathcal{H}_{\pm} , являются точками устойчивого или неустойчивого равновесия системы. В области $\varepsilon \geq 0$ только \mathcal{H}_- может достигать минимума

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{\pm}}{\partial J} = \varepsilon + aJ \pm \frac{Q}{2\sqrt{J}}.$$

Если частота раскачки (Ω) равна нулю, то устойчивые точки равновесия задают положение новой замкнутой орбиты. В силу резонансного условия ($2\pi\nu = 2\pi n$), такая орбита замыкается через один оборот. Если $\Omega \neq 0$, а также не кратна $\omega_0\nu$ или $n\omega_0$, то точки равновесия определяют прецессирующие орбиты.

Области финитного и инфинитного движения по w отделяются траекторией $\mathcal{H}(J, w) = 0$. Однако эта кривая не является особенной для системы (4.6). Пересечение этой кривой не изменяет геометрию фазовой плоскости (рис. 2). Видимое смещение центра плоскости связано с возбуждением вынужденных колебаний. Такое смещение имеет место и при раскачке линейного осциллятора.

4.2. Резонансная кривая

Важное место в изучении влияния внешнего воздействия на нелинейный осциллятор занимает построение резонансных кривых, т. е. зависимостей амплитуд вынужденных колебаний от частоты раскачки (или расстройки от резонанса).

Для уравнений (4.6) амплитуды и фазы вынужденных колебаний являются точками устойчивого равновесия. Поскольку равновесные значения фазы равны $w_s^{\pm} = 0, \pi$, соответствующие им равновесные амплитуды находятся вычислением экстремумов

гамильтонианов \mathcal{H}_\pm . Это дает следующие (неявные) уравнения резонансной кривой:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= -aJ + \frac{Q}{2\sqrt{J}}, \\ \varepsilon &= -aJ - \frac{Q}{2\sqrt{J}}.\end{aligned}\quad (4.8)$$

Если $a > 0$, первое уравнение, соответствующее минимуму \mathcal{H}_- , имеет однозначные решения $J_s(\varepsilon)$ при всех ε (см. линия DCE на рис. 3). Второе уравнение системы (4.8) имеет действительные решения лишь в области $\varepsilon \leq \varepsilon_{cr}$, где

$$\varepsilon_{cr} = -\frac{1}{2} \left(\frac{aQ^2}{2} \right)^{1/3},$$

$$(J_s)_{cr} = \left(\frac{Q}{4a} \right)^{2/3}.$$

Как видно из рис. 3 (кривая ABF), таких действительных решений два.

Вопрос об устойчивости этих решений выясняется вычислением частот малых фазовых колебаний вблизи равновесий. Для этого пишем $J = J_s + p$, $w = w_s + x$, ($|p| \ll J_s$, $|x| \ll w_s$)

$$\mathcal{H} \simeq \mathcal{H}_s + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial J^2} \right)_s p^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial w^2} \right)_s x^2,$$

где производные вычисляются в точке равновесия. Сравнивая это выражение с энергией гармонического осциллятора ($\mathcal{E} = p^2/2M +$

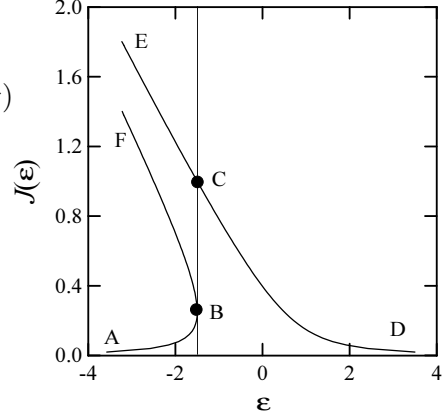


Рис. 3. Резонансная кривая нелинейного осциллятора; $a = 2$, $Q = 1$. Вертикальная линия соответствует критической расстройке

$M\Omega^2 x^2/2$), получаем выражения для эффективной массы и частоты малых фазовых колебаний осциллятора вблизи данной точки равновесия:

$$\frac{1}{M_{eff}} = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial J^2} \right)_s, \quad \Omega_c^2 = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial J^2} \right)_s \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial w^2} \right)_s. \quad (4.9)$$

Устойчивым решениям соответствует $\Omega_c^2 > 0$. На кривой ABF рис. 3 имеем $w_s = 0$. Поэтому величина $(\partial^2 \mathcal{H} / \partial w^2)_s$ отрицательна. Величина Ω_c^2 будет положительна в точках, соответствующих максимумам гамильтониана \mathcal{H}_+ . Это точки линии AB на рис. 4. Они соответствуют точкам линии AB на кривой рис. 3. В точках минимума гамильтониана \mathcal{H}_+ величина Ω_c^2 отрицательна (точки линий BF на рис. 4 и рис. 3). Поэтому точки кривой BF на рис. 3 являются точками неустойчивых равновесий.

Как видно на рис. 4, значение $\varepsilon = \varepsilon_{cr}$ является точкой перегиба кривой $\mathcal{H}_+(J)$.

При медленном прохождении нелинейного резонанса ($\varepsilon' \ll \Omega_s$) значение установившейся амплитуды зависит от направления изменения ε . Если величина ε уменьшается начиная с некоторого положительного значения, то амплитуда установившихся колебаний следует линии DCE резонансной кривой (см. рис. 3). Наоборот, при сканировании резонанса снизу $\varepsilon_{in} < 0$, $\varepsilon' > 0$ изменение амплитуды установившихся колебаний следует линии ABCD. Такое поведение величины установившейся амплитуды называют гистерезисным.

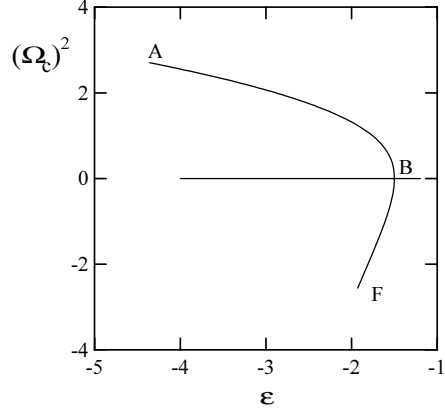


Рис. 4. Зависимость частоты малых фазовых колебаний от расстройки. Участок ABF резонансной кривой; $a = 2$, $Q = 1$

4.3. Сепаратриса

В области $\varepsilon < \varepsilon_{cr}$ на фазовой плоскости появляется еще одна траектория, разделяющая области финитного и инфинитного движения по w . Она определяется уравнением $\mathcal{H}(J, w) = (\mathcal{H}_+)_{\min}$ (рис. 5). В отличие от траектории $\mathcal{H}(J, w) = 0$, новая кривая (сепаратриса) содержит точку неустойчивого равновесия (точка С на рис. 5). Поэтому такая кривая является особенной для систе-

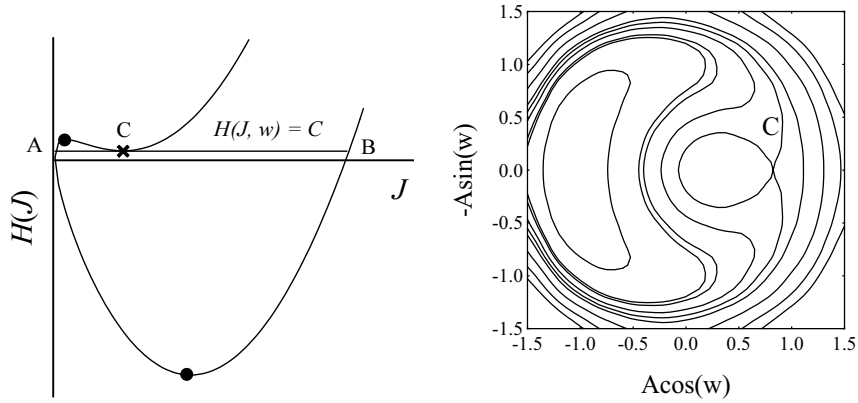


Рис. 5. Схематические зависимости гамильтонианов \mathcal{H}_{\pm} от медленных переменных; $\varepsilon = -2$, действия частицы (J). Верхняя кривая \mathcal{H}_+ , нижняя — \mathcal{H}_- ; $\varepsilon < \varepsilon_{cr}$. Рис. 6. Фазовые траектории в фазовой плоскости $(A \cos(w), -A \sin(w))$; $\varepsilon = -2$, $a = 2$, $Q = 1$, символ C указывает положение сепаратрисы

мы (4.6). При ее пересечении направление фазовых траекторий меняется на противоположное, а точка неустойчивого равновесия является седловой точкой сепаратрисы (рис. 6). Период биений амплитуды колебания на сепаратрисе логарифмически растет. По этой причине движение в окрестности сепаратрисы чувствительно к возмущениям, в том числе и к тем, которые были отброшены при получении уравнений первого приближения метода усреднения.

Упомянутые периоды биения амплитуд вычисляются непо-

средственно интегрированием уравнений (4.6). Для этого пишем

$$T_\theta = 2 \int_{J_{in}}^{J_f} \frac{dJ}{Q\sqrt{J} \sin(w[J])}, \quad (4.10)$$

$$Q\sqrt{J} \sin(w[J]) = \sqrt{[\mathcal{H}_+(J) - \mathcal{H}][\mathcal{H} - \mathcal{H}_-(J)]}.$$

Здесь $J_{f,in}$ – точки останова по J . Например, в точном резонансе $\varepsilon = 0$ период биений амплитуд на траектории $\mathcal{H} = 0$ равен

$$T_\theta = 2 \int_0^{J_c} \frac{dJ}{\sqrt{J[Q^2 - a^2 J^3/4]}} = 2 \left(\frac{2}{Q^2 a} \right)^{1/3} \int_1^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^3 - 1}},$$

где $J_c = (2Q/a)^{2/3}$. Поскольку $t^3 - 1 = (t - 1)(t^2 + t + 1)$, период $T_\theta(\mathcal{H} = 0)$ является конечной величиной. Наоборот, вблизи седловой точки имеем

$$\mathcal{H}_+ - \mathcal{H} \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}_-}{\partial J^2} \right)_s (J - J_s)^2.$$

Поэтому период биений

$$(T_\theta)_c \propto \int^{J_s} \frac{dJ}{\left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}_-}{\partial J^2} \right)_s^{1/2} (J_s - J)} \quad (4.11)$$

логарифмически расходится. Период малых колебаний вблизи центра сепаратрисы, очевидно, равен $T_\theta = 2\pi/\Omega_c$. По этой причине ширина сепаратрисы в пространстве частот равна Ω_c . Если расстояние между резонансными частотами сравнивается с Ω_c , то действие таких резонансов не может учитываться отдельно.

4.4. Влияние трения

Движение частиц в электрон-позитронных машинах сопровождается потерями энергии на синхротронное излучение. При компенсации этих потерь ускоряющим напряжением энергия колебаний тем не менее не восстанавливается. При правильном проектировании фокусирующей системы это приводит к затуханию

колебаний частиц. В настоящее время известно также значительное число методов, обеспечивающих затухание колебаний тяжелых частиц.

Рассмотрим в этой связи действие трения на движение в окрестности изолированного нелинейного резонанса. Если принять для простоты, что сила трения пропорциональна скорости частицы (случай синхротронного излучения), то уравнения движения первого приближения метода усреднения (4.6) заменяются следующими:

$$\begin{aligned} J' &= -\lambda J - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial w} = -\lambda J + Q\sqrt{J} \sin(w), \\ w' &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J} = \varepsilon + aJ + \frac{Q}{2\sqrt{J}} \cos(w). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Здесь λ – декремент затухания колебаний. Уравнения (4.12) не являются гамильтоновыми. Поэтому теперь изучение особенностей движения должно основываться на исследовании самих уравнений (4.12).

Для выяснения качественной картины изменения фазовых траекторий рассмотрим сначала случай, когда декременты трения малы по сравнению с частотами биений амплитуд ($\lambda T_\theta \ll 1$). В такой области параметров негамильтоновость системы мала, а действие трения сводится к медленному изменению гамильтониана системы. Поскольку

$$\mathcal{H}' = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J} J' + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial w} w' = -\lambda J \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J},$$

изменение гамильтониана за период биений равно

$$\Delta \mathcal{H} = -\lambda \int_0^{T_\theta} d\theta \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J} J(\theta) = -\lambda \oint dw J(w). \quad (4.13)$$

В зависимости от величины расстройки (ε) это изменение может быть как отрицательным, так и положительным. В области $\varepsilon > \varepsilon_{cr}$ для всех w имеем

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J} = \varepsilon + aJ + \frac{Q}{2\sqrt{J}} \cos(w) \geq 0.$$

Таким образом, здесь направление фазовых траекторий положи-

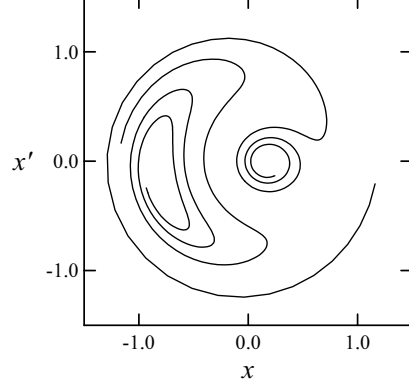
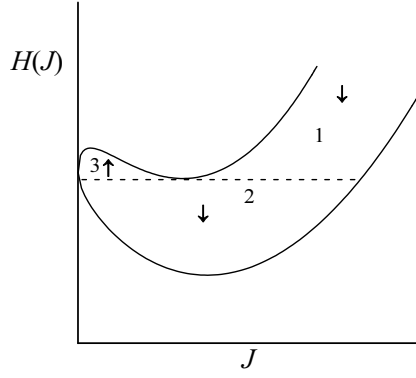


Рис. 7. Схематические зависи- Рис. 8. Затухание колебаний к мости гамильтонианов \mathcal{H}_{\pm} от центрам сепаратрис; $\varepsilon/Q = -3$, действия частицы (J). Верхняя $a/Q = 5$, $\lambda/Q = 0.25$. Для обе- кривая \mathcal{H}_+ , нижняя – \mathcal{H}_- ; $\varepsilon <$ их траекторий начальное значе- 0, стрелки указывают направле- ние J одинаково ($J_{in} = 1.4$), а ние изменения гамильтониана начальные значения фаз равны $w_{in} = 0$ и $w_{in} = \pi$

тельное и согласно формуле (4.13) гамильтониан \mathcal{H} уменьшается, что соответствует затуханию амплитуды и фазы колебаний к равновесным значениям (J_s, w_s). В резонансной области ($\varepsilon < \varepsilon_{cr}$) точек равновесия две. При больших отрицательных значениях расстройки на диаграммах ($\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-$) кроме уже имевшихся областей 1 и 2 (рис. 7), где $\partial\mathcal{H}/\partial J \geq 0$, появляется область 3, в которой направление фазовых траекторий обратное ($\partial\mathcal{H}/\partial J < 0$). В этом случае, согласно формуле (4.13), величина гамильтониана увеличивается при движении вдоль фазовой траектории. Соответственно колебания частицы затухают к центру сепаратрисы в области 3. Направление затухания колебаний в окрестности сепаратрисы зависит от начальных условий. Например, для случая, изображенного на рис. 8, затухание к малым амплитудам происходит с интервала фаз $|w| < \pi/3$.

Как и прежде, резонансная кривая определяется точками равновесия уравнения (4.12):

$$J' = -\lambda J_s + Q\sqrt{J_s} \sin(w_s) = 0, \quad w' = \varepsilon + aJ_s + \frac{Q}{2\sqrt{J_s}} \cos(w_s) = 0.$$

Поскольку $\sin w_s = (\lambda\sqrt{J_s})/Q \leq 1$, значение J_s не может превышать $(Q/\lambda)^2$. Для дальнейших расчетов удобно провести подстановки

$$J = \frac{Q^2}{\lambda^2} u, \quad \tau = \lambda\theta, \quad \Delta = \frac{\varepsilon}{\lambda}, \quad b = \frac{aQ^2}{\lambda^3}.$$

Тогда уравнения равновесия записываются в виде $[(\cdot)' = d/d\tau]$

$$u' = -u + \sqrt{u} \sin w = 0, \quad w' = \Delta + bu + \frac{\cos w}{2\sqrt{u}} = 0, \quad (4.14)$$

а ветви резонансной кривой определяются уравнениями

$$\Delta_{\pm}(u) = -bu \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-u}{u}}. \quad (4.15)$$

Из них, в частности, следует, что в точке окончания ветвей ($u = 1$) резонансная кривая достигает максимума. Поскольку ветви резонансной кривой имеют конечную точку, явление гистерезиса при прохождении резонанса появляется лишь для достаточно больших амплитуд раскачки. Действительно, ветвь $\Delta_+(u)$ имеет участок с отрицательным наклоном, если уравнение

$$\frac{d\Delta_+}{du} = -b - \frac{\Delta_+ + bu}{2u(1-u)} = 0 \quad (4.16)$$

имеет два действительных корня. Поскольку

$$u_{1,2} = \frac{3}{4} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{8}{9} \frac{\Delta_+}{b}} \right),$$

это требует выполнения условия $(\Delta_+ < 0) \quad b \geq 8|\Delta|/9$ или

$$Q \geq \frac{2\lambda}{3} \sqrt{\frac{2|\varepsilon|}{a}} \quad (4.17)$$

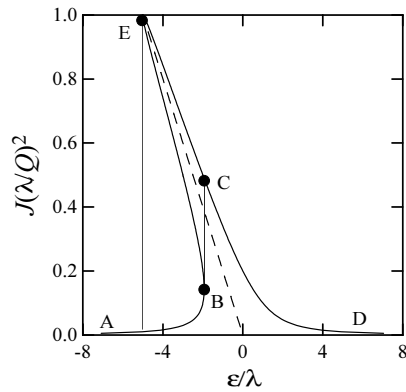


Рис. 9. Резонансная кривая внешнего резонанса с трением; $b = (aQ^2/\lambda^3) = 5$

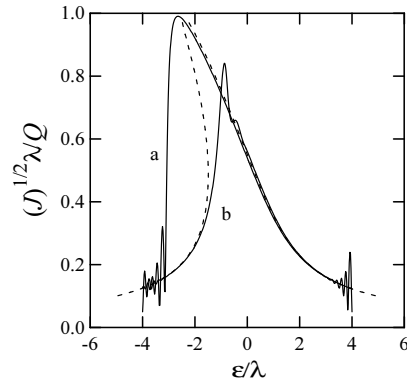


Рис. 10. Прохождение резонансной кривой. Кривая (a) – прохождение сверху вниз; кривая (b) – снизу вверх; $b = 2.5$, $\varepsilon' = \lambda/10$. Пунктирная линия изображает резонансную кривую для этого случая

Пример резонансной кривой для осциллятора с трением приведен на рис. 9. Собственно ширина резонанса задается интервалом расстроек на участке BE. Как и раньше, этот участок кривой содержит седловые точки сепаратрис. По этой причине величины установившихся амплитуд различны для прохождения резонанса снизу вверх (кривая (b) на рис. 10) и сверху вниз (кривая (a) на рис. 10). В первом случае амплитуда колебаний резко увеличивается после точки B (см. рис. 9). Во втором – после прохождения точки E (см. рис. 9) колебания срываются.

5. РЕЗОНАНСНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ СЕКСТУПОЛЯМИ

Помимо исправления хроматизма машины, секступольные поля могут вызывать многочисленные побочные явления. В этих случаях возмущения колебаний частиц описываются следующей

добавкой к гамильтониану:

$$\Delta h = 4G_2(\theta)(x^3 - 3xz^2), \quad G_2(\theta) = -\frac{eR_0^2}{12pc} \left. \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0(\theta)}. \quad (5.1)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \cos^3 \phi_x &= \frac{\cos 3\phi_x + 3 \cos \phi_x}{4}, \\ \cos \phi_x \cos^2 \phi_z &= \frac{2 \cos \phi_x + \cos(2\phi_z + \phi_x) + \cos(2\phi_z - \phi_x)}{4}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

В первом приближении метода усреднения секступольные линзы могут возбуждать резонансы

$$\begin{aligned} \nu_x &= n, & \nu_x &= n/3, \\ \nu_x + 2\nu_z &= n, & \nu_x - 2\nu_z &= n, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где n - целые числа.

Рассмотрим сначала случай, когда $\nu_x \simeq n/3$, как наиболее простой и характерный для возмущений секступольными полями. Для этого подставим в формулу (5.1)

$$x = \sqrt{\frac{2I\beta}{R_0}} \cos[\phi_x(\psi_x, \theta)], \quad \phi_x(\theta)' = 1/\beta_x,$$

и усредним Δh , считая малой величиной расстройку от резонанса $\varepsilon = \nu_x - n/3$. После отбрасывания быстроосциллирующих слагаемых усредненный гамильтониан записывается в виде

$$\mathcal{H} = \varepsilon J + QJ^{3/2} \cos 3w, \quad (5.4)$$

где

$$Q = 2|V_n|, \quad w = \psi_x - (n/3)\theta + \arg V_n,$$

а

$$V_n = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} G_2(\theta) \beta_x^{3/2}(\theta) \exp[3i\phi_x(\theta)].$$

Фазовые траектории определяются уравнением $\mathcal{H}(J, w) = C$. Условия устойчивости колебаний легко получить изучением поведения функций \mathcal{H}_{\pm} :

$$\mathcal{H}_{\pm} = \varepsilon J \pm J^{3/2} Q.$$

Пусть, например, $\varepsilon > 0$. Тогда (рис. 11) функция $\mathcal{H}_+(J)$ монотонно возрастает, а $\mathcal{H}_-(J)$ - имеет максимум при

$$J = J_c = \frac{4\varepsilon^2}{9Q^2}. \quad (5.5)$$

Таким образом, в отсутствие других нелинейностей единственной стационарной точкой вблизи резонанса $\nu = 1/3$ является точка неустойчивого равновесия. В зависимости от начальных условий

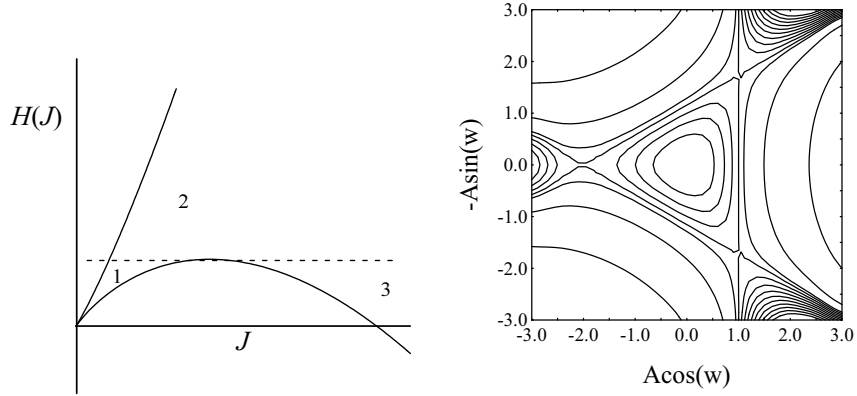


Рис. 11. Зависимости гамильтонианов \mathcal{H}_{\pm} от действия; $\varepsilon > 0$, верхняя кривая соответствует \mathcal{H}_+

Рис. 12. Фазовые траектории в медленных переменных вблизи резонанса $1/3$; $\varepsilon = 3$, $a = 0$, $Q = 1$. Траектория треугольной формы соответствует сепаратрисе J_c

движение может быть как устойчивым (что соответствует области 1 на рис. 11), так и неустойчивым (области 2 и 3 на рис. 11);

см. также фазовые траектории на рис. 12). Положение сепаратрисы, разделяющей фазовые траектории устойчивых и неустойчивых колебаний, определяется уравнением

$$\mathcal{H}(J, w) = \frac{4\varepsilon^3}{27Q^2}. \quad (5.6)$$

Уравнение (5.5) определяет так называемую (радиальную) динамическую апертуру фокусировки кольца в окрестности резонанса $n/3$. Поскольку $J = J_c$ является точкой неустойчивого равновесия, значение апертуры в формуле (5.5) может оказаться чувствительно к возмущениям. В этой связи может оказаться полезным уточнение величины J_c с использованием второго приближения метода усреднения либо численное моделирование.

Используя выражения (5.1) и (5.2), можно найти аналогичные ограничения апертуры вблизи резонансов $\nu_x = n$ и $\nu_x + 2\nu_z = n$. Таким образом, компенсация хроматизма машины секступолями может сопровождаться уменьшением динамической апертуры кольца. Поскольку ограничение связано с резонансным возмущением колебаний частиц, это ограничение можно ослабить специальным расположением секступолей вдоль орбиты накопителя. Пусть, например, хроматизм корректируется набором коротких секступолей ($G_2 \propto \delta(\theta - \theta_k)$, $k = 1, 2, \dots$), расположенных в местах с ненулевой дисперсионной функцией. Резонансное возмущение каждого такого секступоля будет компенсировано, если поместить на орбиту дополнительное семейство секступолей, расположенных в местах с тем же значением β -функции, но сдвинутых по фазе бетатронных колебаний на π .

Колебания вблизи резонанса $\nu = 1/3$ могут стабилизироваться кубической нелинейностью ведущего поля. Приняв для простоты $\varepsilon = \varepsilon + aJ$, пишем

$$\mathcal{H} = \varepsilon J + \frac{aJ^2}{2} + QJ^{3/2} \cos 3w. \quad (5.7)$$

Как и прежде, стационарные значения фаз определяются уравне-

нием $\sin 3w_s = 0$, а амплитуд – уравнениями

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{\pm}}{\partial J} = \varepsilon + aJ \pm \frac{3}{2}Q\sqrt{J} = 0. \quad (5.8)$$

Отсюда следует, что в области $\varepsilon > 0$ функция $\mathcal{H}_+(J)$ не имеет экстремумов, а функция $\mathcal{H}_-(J)$ имеет максимум и минимум в точках

$$x_{\pm} = \frac{3}{4a} \left[Q \pm \sqrt{Q^2 - \frac{16\varepsilon a}{9}} \right], \quad x = \sqrt{J}. \quad (5.9)$$

Это возможно лишь в интервале расстроек

$$0 < \varepsilon < \frac{9Q^2}{16a},$$

где формируется сепаратриса с центром в точке x_+ и седлом в точке x_- . При больших значениях расстройки

$\varepsilon \geq 9Q^2/16a$ такая область автофазировки пропадает,

а модуляция амплитуд колебаний становится тем меньше, чем больше a . В области

$\varepsilon < 0$ функции (\mathcal{H}_{\pm}) имеют минимумы в точках

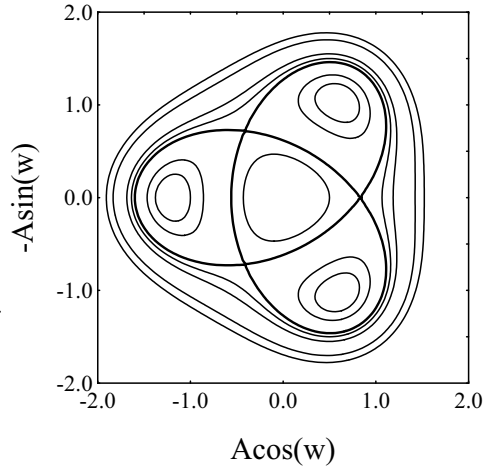


Рис. 13. Фазовые траектории в медленных переменных вблизи резонанса $1/3$; $\varepsilon = -4$, $a = 2$, $Q = 1$. Жирной линией выделена сепаратриса J_c

$$x^{(\pm)} = \frac{3Q}{4a} \sqrt{1 + \frac{16|\varepsilon|a}{9Q^2}} \mp \frac{3Q}{4a}.$$

Устойчивых точек равновесия три (рис. 13): $[J^{(-)}, \pi/3]$, $[J^{(-)}, \pi]$ и $[J^{(-)}, 5\pi/3]$. Они разделены седловыми точками: $[J^{(+)}, 0]$, $[J^{(+)}, 2\pi/3]$

и $[J^{(+)}, 4\pi/3]$. Как и прежде, точки устойчивого равновесия определяют положения замкнутых орбит. Поскольку $\nu = 1/3$, эти орбиты замыкаются через три оборота.

Как уже говорилось, например, в электрон-позитронных машинах колебания частиц затухают за счет потерь энергии на синхротронное излучение. Поскольку мощность силы трения в этом случае равна $-\lambda J$, оно может подавлять резонансы третьего и более высокого порядков в области малых амплитуд колебаний. Например, для резонанса $\nu = 1/3$ условие стационарности J записывается в виде

$$\sin 3w_s = \frac{\lambda}{3Q\sqrt{J_s}}.$$

Поэтому условие $|\sin(3w_s)| \leq 1$ выполняется лишь в области, где $J_s \geq \lambda^2/(3Q)^2$.

Хотя нелинейность и стабилизирует неустойчивые колебания, накопление частиц вблизи центров сепаратрис будет приводить к увеличению эффективного фазового объема пучка и соответственно снижать его плотность в фазовом пространстве. Если это нежелательно, то в области $\varepsilon < 0$ значение динамической апертуры следует определять меньшим корнем уравнения $\mathcal{H}_-(J_c) = (\mathcal{H}_+)_{\min}$.

6. ВСТРЕЧНЫЕ ПУЧКИ

6.1. Светимость

Светимость установки с встречными пучками определяется как скорость счета событий при единичном сечении реакции. Чем больше светимость, тем больше производительность установки. Если ρ_1 и ρ_2 – плотности сталкивающихся сгустков, то при единичном сечении реакции количество событий в единичном, лобовом столкновении пары сгустков с релятивистскими энергиями частиц определяется интегралом

$$\Delta N = 2c \int d^2r_{\perp} ds dt \rho_1(\mathbf{r}_{\perp}, s - ct) \rho_2(\mathbf{r}_{\perp}, s + ct).$$

Если сгустки сталкиваются с частотой $f_b = n_b f_0$ (f_0 - частота обращения, n_b - число сгустков в пучке), то скорость счета (светимость) равна

$$L = \Delta N f_b = f_b 2c \int d^2 r_{\perp} ds dt \varrho_1(\mathbf{r}_{\perp}, s - ct) \varrho_2(\mathbf{r}_{\perp}, s + ct). \quad (6.1)$$

Наиболее простые выражения для светимости получаются для лобовых столкновений сгустков с круглым поперечным сечением. Если, например, плотности сгустков гауссовы:

$$\varrho_{1,2}(\mathbf{r}, t) = \frac{N_{1,2}}{(2\pi)^{3/2} \sigma^2(s) \sigma_s} \exp\left(-\frac{x^2 + z^2}{2\sigma^2(s)} - \frac{(s \pm ct)^2}{2\sigma_s^2}\right), \quad (6.2)$$

то после простого интегрирования в формуле (6.1) приходим к выражению

$$L = L_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{du e^{-u^2}}{1 + \zeta^2 u^2}, \quad L_0 = f_b \frac{N_1 N_2}{4\pi \beta \epsilon} \quad \zeta = \frac{\sigma_s}{\beta}. \quad (6.3)$$

Здесь принято, что $\beta_x(s) = \beta_z(s) = \beta(s)$, а также учтено, что вблизи места встречи $\sigma^2(s) = \beta(s)\epsilon$, (ϵ - эмиттанс пучка) и

$$\beta(s) = \beta + \frac{s^2}{\beta},$$

β - значение β -функции в центре места встречи. Из формулы (6.3) видно, что светимость столкновений коротких пучков ($\sigma_s \ll \beta$) равна L_0 . Эта величина тем больше, чем больше числа частиц в пучках, чем меньше их эмиттансы и чем лучше они фокусируются на место встречи. При увеличении длины сгустка значение светимости уменьшается. Поскольку

$$L \simeq \frac{L_0 \sqrt{\pi}}{\zeta} = f_b \frac{N_1 N_2}{4\pi \epsilon (\sigma_s / \sqrt{\pi})}, \quad \zeta \gg 1,$$

для увеличения светимости следует уменьшать β -функцию в месте встречи при условии, что и длины пучков могут быть уменьшены.

Уже при запуске первых установок с встречными пучками было обнаружено (см., например, [3, 4] и ссылки в этих работах), что одно из основных ограничений светимости связано с возмущениями движения частиц электромагнитными полями встречного сгустка в месте встречи. По принятой в отечественной литературе терминологии этот многоплановый круг явлений сокращенно называют эффектами встречи. Они выражаются в появлении неустойчивости колебаний индивидуальных частиц либо сгустков в целом. Характер таких неустойчивостей в значительной степени определяется нелинейностью полей сгустков и периодичностью испытываемых частицами возмущений. Поэтому большинство ограничений светимости связано с такими изменениями геометрии фазового пространства частиц, когда значительное число их проводит заметное время вне центральной части сгустка.

6.2. Поле встречного сгустка

Для упрощения расчетов мы примем, что пучки движутся в раздельных кольцах с идентичными фокусировками. После столкновения сгустки разводятся таким образом, чтобы за время одного оборота каждый сгусток пучка встречается лишь с одним сгустком пучка-мишени. Если этого сделать не удастся, то кроме основного места встречи на орбите появляются дополнительные, так называемые паразитные места встречи. Для простоты будем считать, что такие паразитные места встречи отсутствуют. Энергию частиц считаем ультррелятивистской ($\mathcal{E} = \gamma M c^2$, $\gamma \gg 1$). Поперечное электрическое поле сгустка, движущегося вдоль равновесной орбиты со скоростью $\mathbf{v}_2 = \{0, -c, 0\}$ и имеющего плотность

$$\varrho(\mathbf{r}, t) = \frac{N}{2\pi\sigma^2} \rho(s + ct) \exp\left(-\frac{x^2 + z^2}{2\sigma^2}\right), \quad (6.4)$$

с ультррелятивистской точностью определяется выражением

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{r}}{r} E, \quad E = \frac{2Ne_2}{\sigma^2 r} \rho(s + ct) \int_0^r dr r e^{-r^2/2\sigma^2}. \quad (6.5)$$

После простого интегрирования получаем

$$E = 2Ne_2\rho(s + ct) \frac{1 - \exp[-r^2/(2\sigma^2)]}{r^2} \mathbf{r}. \quad (6.6)$$

С той же точностью магнитное поле сгустка равно

$$\mathbf{H} = [\mathbf{v}_2 \times \mathbf{E}]/c. \quad (6.7)$$

Сила, действующая на частицы встречного сгустка, движущегося

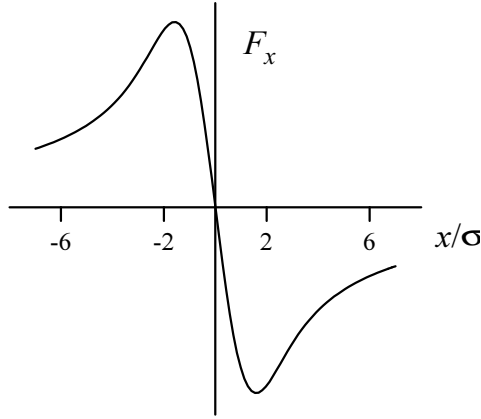


Рис. 14. Зависимость (радиальной) силы, возмущающей встречный пучок, от поперечного смещения частицы. Плотность распределения поперечных координат во встречном сгустке гауссова

со скоростью $\mathbf{v}_1 = \{0, c, 0\}$, равна

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{1,2} &= e_1 (\mathbf{E} + [\mathbf{v}_1 \times \mathbf{H}]/c^2), \\ &\simeq 2e_1 \mathbf{E} = 4Ne_1e_2\rho(s + ct) \frac{1 - \exp[-r^2/(2\sigma^2)]}{r^2} \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Она линейна вблизи центра сгустка, однако при увеличении расстояния от центра она сначала проходит максимум, а затем уменьшается пропорционально $1/r$ (см. также на рис. 14). Как функция времени эта сила представляет собой серию периодических, коротких толчков. Если сгустки движутся в разных кольцах с частотой обращения ω_0 каждый, то период этих толчков равен $2\pi/\omega_0$. При длине сгустков σ_s длительность толчков есть $\delta t = \sigma/(2c)$. Как и

всякое другое, такое периодическое возмущение приводит к резонансным неустойчивостям колебаний пучка.

Приведем еще выражения для электрических полей ультрарелятивистского сгустка с гауссовым, эллиптическим распределением частиц по поперечным координатам. Если σ_x и σ_z – среднеквадратичные горизонтальный и вертикальный размеры пучка, то, например, поле $E_x = -\partial U/\partial x$ определяется потенциалом

$$U = Ne_2\rho \int \frac{d^2k}{\pi k^2} F_x F_z, \quad (6.9)$$

где $F_x = \exp(ik_x x - k_x^2 \sigma_x^2/2)$, $F_z = \exp(ik_z z - k_z^2 \sigma_z^2/2)$. Используя соотношение

$$\frac{1}{k^2} = \int_0^\infty ds e^{-sk^2},$$

и выполняя в формуле (6.9) интегрирование гауссовых функций, после несложных преобразований получаем ($\Sigma^2 = \sigma_x^2 - \sigma_z^2 > 0$)

$$E_x = \frac{2Ne_2\rho x}{\Sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 - z^2}{2\Sigma^2}\right) \int_{\sigma_z/\sigma_x}^1 du \exp\left(\frac{x^2 u^2 - z^2/u^2}{2\Sigma^2}\right). \quad (6.10)$$

Входящий в это выражение интеграл по u может быть выражен через интегралы вероятности комплексного аргумента. Поле E_z получается из этого выражения заменой x на z .

6.3. Неустойчивость линейных колебаний частиц

Хотя по своей природе взаимодействие встречных пучков является самосогласованным (изменения параметров данного сгустка зависит от того, как его поля меняют параметры партнера), значительный класс ограничений можно проследить, исследуя изменения движения отдельных частиц в заданном поле встречного сгустка. В таком случае говорят о расчетах в приближении «слабого и сильного» сгустков.

Рассмотрим в таком приближении вопрос об устойчивости линейных бетатронных колебаний частиц. Для простоты считаем,

что сталкиваются, например, электронный и позитронный сгустки, а их длины малы по сравнению с значением β -функции в месте встречи. В этом случае сила, действующая на частицу из сгустка 1 в месте встречи, получается линеаризацией выражения (6.8) по поперечным отклонениям

$$\mathbf{F}_{1,2} \simeq -\mathbf{r}_\perp \delta_T(s+ct) \frac{2Ne^2}{\sigma^2}, \quad (6.11)$$

где $\delta_T(s)$ - периодическая δ -функция. Таким образом, проходя место встречи, частица испытывает удар согласно

$$\frac{dp_z}{ds} = -z \frac{2N_2 e^2}{c\sigma^2} \delta_T(s+ct). \quad (6.12)$$

Соответствующее изменение p_z описывается матрицей перехода

$$\mathbf{M}_{bb}(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{4\pi\xi}{\beta} & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.13)$$

где

$$\xi = \frac{N_2 e_1 e_2}{4\pi r c \epsilon} \quad (6.14)$$

- так называемый параметр пространственного заряда сталкивающихся пучков. Принимая, что преобразование отклонений частиц между местами встречи задается матрицей

$$\mathbf{M}_B = \begin{bmatrix} \cos \mu_0 & \beta \sin \mu_0 \\ -\frac{\sin \mu_0}{\beta} & \cos \mu_0 \end{bmatrix}, \quad (6.15)$$

после перемножения матриц

$$\mathbf{M}_t = \mathbf{M}_{bb}(\xi/2) \mathbf{M}_B \mathbf{M}_{bb}(\xi/2)$$

находим

$$\cos \mu_z = \frac{(M_t)_{11} + (M_t)_{22}}{2} = \cos \mu_{z0} - 2\pi\xi_z \sin \mu_{z0} \quad (6.16)$$

и

$$\beta_z = \beta_{z0} \frac{\sin \mu_{z0}}{\sin \mu_z}. \quad (6.17)$$

Здесь $\mu_0 = 2\pi\nu_{z0}$, а $\mu = 2\pi\nu_z$, ν_z – новое значение частоты вертикальных бетатронных колебаний. Если величина ξ мала ($\xi \ll 1$), разложением правых частей в формулах (6.16) и (6.17) в ряды по степеням ξ в линейном приближении получим

$$\Delta\nu_z \simeq \xi_z, \quad \frac{\Delta\beta_z}{\beta_{z0}} \simeq -2\pi\xi_z \cot \mu_{z0}. \quad (6.18)$$

Колебания устойчивы при выполнении условия $|\cos \mu_z| \leq 1$ или

$$\xi_z \leq \xi_{th} = \frac{1}{2\pi} \cot(\pi\nu_{z0}), \quad 0 \leq \nu_{z0} \leq 1/2. \quad (6.19)$$

Последнее уравнение определяет уравнение границы области устойчивости колебаний $[\xi_{th}(\nu_{z0})]$. Как видно из рис. 15, для противоположно заряженных частиц ширина области устойчивости существенно увеличивается, когда частота бетатронных колебаний расположена выше резонансных значений $\nu_{z0} = 1/2, 1, 3/2 \dots$. Такая форма границы области устойчивости связана с тем, что для противоположно заряженных частиц $e_1 e_2 < 0$

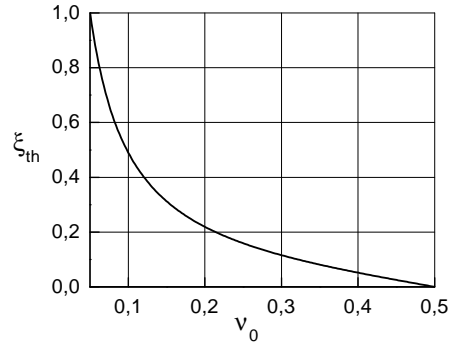


Рис. 15. Граница области устойчивости линейных бетатронных колебаний встречных пучков. Колебания устойчивы ниже граничной кривой

взаимодействие пучков в месте встречи усиливает фокусировку ($\Delta\nu_z = \xi > 0$). При этом истинное резонансное условие $\nu_{z0} + \Delta\nu_z = n/2$ выполняется в областях $\nu_{z0} < n/2$. Согласно формуле (6.17), непосредственно над резонансом величина β -функции

оказывается существенно меньшим невозмущенного значения β_0 . Поскольку светимость пропорциональна $1/\beta$, в таких областях частот можно ожидать увеличения светимости установки. Наоборот, при приближении к резонансу с низу β -функции неограниченно нарастают. Эти особенности границы области устойчивости и зависимости β -функций от частоты указывают как на более предпочтительное положение частот бетатронных колебаний частиц чуть выше резонансных значений $n/2$. Для одноименно заряженных частиц $\Delta\nu = -\xi$. Поэтому указанные особенности поведения границы области устойчивости, β -функции и светимости приходятся на частоты ниже резонансных.

Изменение β -функций полем встречного сгустка приводит к рассогласованию фазовых траекторий частиц и невозмущенного акцептанса кольца. Так, для одного места встречи на замкнутой орбите фазовые траектории частиц оказываются вытянутыми вдоль оси x' , если $\nu_0 < 1/4$. В области $\nu_0 > 1/4$, они более вытянуты вдоль оси x (рис. 16).

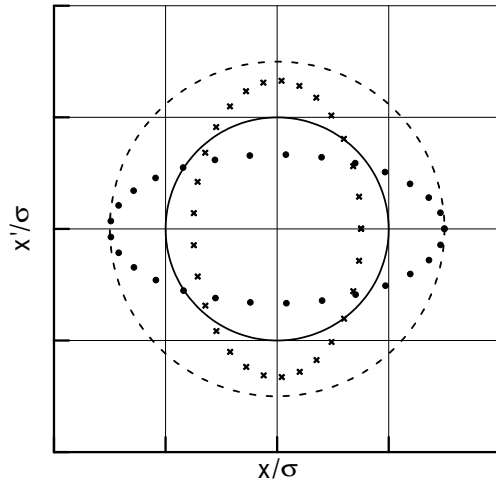


Рис. 16. Фазовые траектории частиц в месте встречи. Сплошная линия – невозмущенная траектория, \times – траектория при $\nu_0 = 0.1$, \bullet – траектория при $\nu_0 = 0.35$ (пунктирная линия указывает границу эффективного фазового объема для этого случая). Одно место встречи, $\xi = 0.05$

Без специальных коррекций такое рассогласование приводит к возбуждению стационарных квадрупольных колебаний пучка.

Для плоских пучков $\sigma_x > \sigma_z$ величины параметра пространственного заряда для вертикальных и горизонтальных колебаний могут быть установлены линеаризацией правой части формулы (6.10) по поперечным координатам. Они определяются формулами

$$\xi_z = \frac{Ne^2\beta_z}{2\pi pc\sigma_z(\sigma_x + \sigma_z)}, \quad (6.20)$$

$$\xi_x = \frac{Ne^2\beta_x}{2\pi pc\sigma_x(\sigma_x + \sigma_z)}. \quad (6.21)$$

Условие устойчивости колебаний ($\xi \leq \xi_{th}$) ограничивает светимость установки. Например, для столкновений одинаковых сгустков с круглым поперечным сечением на пороге неустойчивости пишем

$$\xi_{th} = \frac{Ne^2}{4\pi pc\epsilon} \rightarrow \epsilon \geq \frac{Ne^2}{4\pi pc\xi_{th}}.$$

Подстановка такого значения ϵ в выражения для L_0 в уравнении (6.3) дает

$$L_0 \leq L_{th} = f_b \frac{N\gamma\xi_{th}}{\beta r_0}, \quad r_0 = \frac{e^2}{Mc^2}. \quad (6.22)$$

Такая формула широко используется при проектировании установок с встречными пучками. При этом в качестве ξ_{th} подставляется некоторое «среднемировое» достижимое значение. Например, для электрон-позитронных машин принято считать безопасным значение $\xi_{th} = 0.05$.

6.4. Самосогласованные β -функции

Расчеты в линейном приближении по отклонениям частиц от равновесия хотя и дают ограниченное описание неустойчивости, но зато из-за своей простоты позволяют продвинуться в понимании характера некоторых ограничений связанных с взаимодействием встречных пучков. В частности, удается проследить влияние самосогласованности взаимодействия на неустойчивость поперечных размеров сталкивающихся пучков [5].

Как было установлено в предыдущем разделе, для каждого из сгустков изменение β -функции за счет эффектов встречи описывается уравнением (6.17). Имея в виду столкновения противоположно заряженных частиц и заменяя индексы 1 и 2 знаками «плюс» и «минус», перепишем его в виде

$$\beta_{\pm} = \beta_{0\pm} \frac{\sin \mu_{0\pm}}{\sin \mu_{\pm}}. \quad (6.23)$$

Определив

$$x = \frac{\beta_{0+}}{\beta_+}, \quad y = \frac{\beta_{0-}}{\beta_-},$$

пишем

$$x = \frac{\sin(\mu_+)}{\sin(\mu_{0+})}, \quad y = \frac{\sin(\mu_-)}{\sin(\mu_{0-})}, \quad (6.24)$$

а также

$$\xi_+ = y \frac{N_- e^2}{4\pi(p c)_+ \epsilon_-} = y \xi_+^{(0)}, \quad \xi_- = x \xi_-^{(0)},$$

где

$$\xi_{\pm}^{(0)} = \frac{N_{\mp} e^2}{4\pi(p c)_{\pm} \epsilon_{\mp}}. \quad (6.25)$$

Для простоты величины ϵ_{\pm} будут считаться заданными. Из уравнений (6.24) и (6.16) находим

$$\begin{aligned} x^2 &= 1 - B_+^2 y^2 + 2B_+ y \cot(\mu_{0+}), & B_{\pm} &= 2\pi \xi_{\pm}^{(0)} \\ y^2 &= 1 - B_-^2 x^2 + 2B_- x \cot(\mu_{0-}), \end{aligned} \quad (6.26)$$

Эта система уравнений показывает, что β -функции сталкивающихся пучков не являются независимыми. Поскольку уравнения (6.26) довольно сложны для прямых вычислений, мы рассмотрим простой случай, когда невозмущенные параметры сталкивающихся пучков равны (симметричные столкновения)

$$B_+ = B_- = B, \quad \mu_{0+} = \mu_{0-} = \mu_0.$$

При этом уравнения (6.26) принимают вид

$$\begin{aligned}x^2 &= 1 - B^2 y^2 + 2By \cot(\mu_0), \\y^2 &= 1 - B^2 x^2 + 2Bx \cot(\mu_0).\end{aligned}\tag{6.27}$$

Функциям Флоке сгустка соответствуют действительные корни этого уравнения. Они автоматически удовлетворяют условиям устойчивости колебаний частиц. Вычитанием уравнений системы (6.27)

$$(x - y) [(1 - B^2)(x + y) + 2B \cot \mu_0] = 0$$

убеждаемся в том, что корни уравнения (6.27) могут соответствовать как симметричным ($x = y$), так и несимметричным ($x \neq y$) решениям. Для симметричных решений находим

$$x = y = \frac{B \cos(\mu_0) + \sqrt{B^2 + \sin^2(\mu_0)}}{(1 + B^2) \sin(\mu_0)}.\tag{6.28}$$

Они существуют для всех μ_0 (рис. 17), что связано с самосогласованностью взаимодействия.

Несимметричные решения возможны только в таких областях, где

$$A = -\frac{2B \cot(\mu_0)}{1 - B^2} > 0.\tag{6.29}$$

Соответствующие корни определяются выражениями

$$y = \frac{A + D}{2},\tag{6.30}$$

$$x = \frac{A - D}{2},\tag{6.31}$$

где

$$D = \sqrt{\frac{A^2(B^2 - 3) + 4}{1 + B^2}}.$$

Они существуют в ограниченной полосе частот ν_0 (рис. 18). Положение верхней границы ν_f определяется условием слияния корней ($x = y$):

$$\nu_f = \frac{1}{2\pi} \arccos\left(\frac{B^2 - 1}{\sqrt{1 + B^2}}\right), \quad B < 1,$$

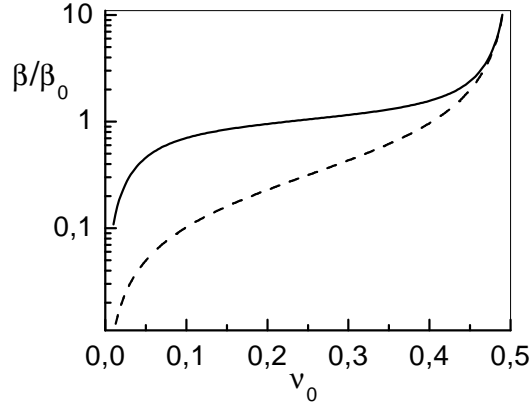


Рис. 17. Зависимость самосогласованных β -функций от частот невозмущенных колебаний. Симметричные решения, $\xi = 0.05$. Пунктирная кривая показывает предел по устойчивости колебаний

а нижней – условием обращения x в нуль:

$$\nu_{in} = \frac{1}{2\pi} \arccos \left(\frac{B^2 - 1}{1 + B^2} \right), \quad B < 1.$$

Ширина этой области оценивается выражением

$$\Delta\nu = \frac{1}{2\pi} \arccos \left[\frac{(1 - B^2)^2 + 2B^2\sqrt{3 - B^2}}{(1 + B^2)^{3/2}} \right]. \quad (6.32)$$

При малых значениях ξ это выражение упрощается

$$\Delta\nu \simeq \frac{7 - 4\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \xi \simeq 0.27\xi. \quad (6.33)$$

Например, в области $\xi \leq 0.05$ погрешность такой оценки не превышает 15 %.

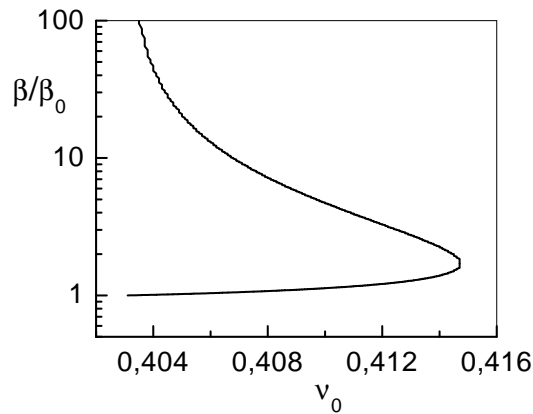


Рис. 18. Зависимости β -функций от частоты невозмущенных колебаний. Flip-flop решения, $\xi = 0.05$

Поскольку $y \geq x$, найденные решения соответствуют такой геометрии сталкивающихся пучков, когда их взаимодействие приводит к увеличению радиуса одного из сгустков и соответствующему уменьшению радиуса второго (рис. 18). Описанный эффект действительно наблюдался в накопителях. Причем опыт показывает, что несимметричное состояние не является устойчивым. Без видимых причин сгустки могут «обменяться» размерами. Такое явление получило название flip-flop эффект. В реалистической области параметров ($B < 1$) flip-flop решения находятся в сравнительно узкой полосе частот невозмущенных бетатронных колебаний, которая расположена чуть ниже полосы параметрического резонанса. Это обстоятельство является особенностью используемой модели, в которой из за линейных зависимостей сил от отклонений частиц могут быть только параметрические резонансы. Вместе с тем модель позволяет ожидать, что при учете нелинейной зависимости полей встречных сгустков от координат частиц сгустки могут оказаться неустойчивыми относительно flip-flop расщепления вблизи нижних границ полос нелинейных резонансов встречных пучков. На это указывают как наблюдения, так

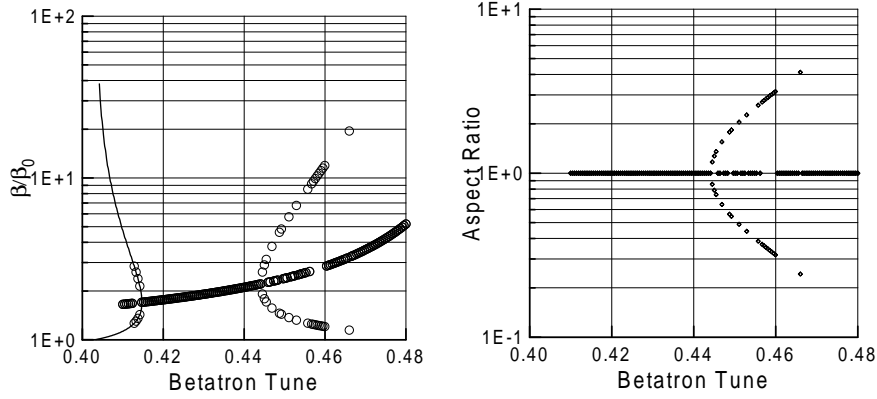


Рис. 19. Зависимость β -функций в месте встречи (правый рисунок) и эллиптичности пучков (r ; левый рисунок) от ν_0 . В отсутствие столкновений поперечные сечения пучков круглые ($r_0 = 1$); $\xi = 0.05$; точки получены численным решением уравнений, сплошная линия – аналитические вычисления в предположении о неизменности эллиптичности сгустков; одно место встречи

и результаты численного моделирования (см., например, [6]).

В приведенных вычислениях мы полагали, что самосогласованное взаимодействие встречных пучков не изменяет отношений их радиальных и вертикальных размеров. Вообще, это является предположением, которое должно подтверждаться вычислениями. Учет возможной эллиптичности поперечных сечений сталкивающихся сгустков приводит к уравнениям

$$z_{\pm}^2 = 1 + 2B \cot \mu_0 w_{\mp} - B^2 w_{\mp}^2; \quad (6.34)$$

$$\left(\frac{z_{\pm}}{r_{\pm}^2} \right)^2 = 1 + 2B \cot \mu_0 \frac{w_{\mp}}{r_{\mp}} - B^2 \left(\frac{w_{\mp}}{r_{\mp}} \right)^2, \quad (6.35)$$

где $z_{\pm} = \beta_{0,z}/\beta_z$, $r = \sigma_x/\sigma_z$, а $w_{\pm} = 2z_{\pm}/(1 + r_{\pm})$. Среди прочих уравнения (6.34) и (6.35) имеют корни, соответствующие решениям без изменения эллиптичности пучков $r_+ = r_- = 1$. При

этом увеличение, скажем, вертикального размера сгустка сопровождается пропорциональным увеличением его радиального размера. Численным решением уравнений (6.34) и (6.35) находим, что такие корни несколько удалены от параметрического резонанса (рис. 19). При дальнейшем увеличении ν_0 у уравнений для огибающей появляются корни, описывающие самосогласованное изменение не только размеров пучков, но и их эллиптичности (см. рис. 19). Области неустойчивостей с изменением и без изменения эллиптичности сгустков разделены по частотам и имеют различную ориентацию по направлению к резонансу. Уменьшение параметра ξ сужает ширины полос частот, в которых возможна неустойчивость, но не устраняет ее.

7. ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ ПОЛЕЙ ПУЧКОВ

Наиболее существенные ограничения светимости из-за эффектов встречи связаны с нелинейными зависимостями полей встречных пучков от координат частиц (см., например, [3]). Такая нелинейность приводит, с одной стороны, к зависимости частот колебаний от амплитуд, а с другой – к возбуждению различного рода нелинейных резонансов.

Хотя в общем случае полное описание нелинейных эффектов встречи является очень сложной задачей, характер основных явлений можно проиллюстрировать вычислениями в рамках приближения «слабого и сильного» сгустков с использованием для отклоняющей силы более или менее простых моделей. Например, правильные асимптотики силы дает выражение

$$\mathbf{F} = -4Ne^2\delta_T(s+ct)\frac{\mathbf{r}_\perp}{d^2(s)+r_\perp^2}. \quad (7.1)$$

Ему соответствует следующее распределение плотности в сильном сгустке:

$$\varrho(\mathbf{r}, t) = \frac{N\delta_T(s+ct)}{\pi[d^2(s)+r_\perp^2]^2}. \quad (7.2)$$

Параметр пространственного заряда находится, например, линеаризацией F_x по x . Ниже для простоты мы изучим случай, когда в месте встречи $\beta_x = \beta_z = \beta$. Определяя эмиттансы пучка согласно $d^2 = \beta\epsilon$, находим

$$\xi = \frac{Ne^2}{2\pi r_s \epsilon}. \quad (7.3)$$

Заметим, что величина ξ в этой формуле не зависит от значения β -функции в месте встречи.

7.1. Эффекты гамильтоновой динамики

Если действием сил трения на колебания частиц можно пренебречь, то в рамках принятой модели уравнения движения частиц получаются с помощью гамильтониана

$$\mathcal{H} = \nu_z J_z + U, \quad U = 8\pi\xi\epsilon\delta_T(\theta + \omega_0 t) \ln \frac{d^2 + r_\perp^2}{d^2}. \quad (7.4)$$

В типичных условиях значение дисперсионной функции кольца в месте встречи равно нулю. Тогда невозмущенные бетатронные колебания описываются выражениями

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{J_x \beta_x(\theta)} \cos(\phi_x), \quad \frac{d\phi_{x,z}}{d\theta} = \frac{R_0}{\beta_{x,z}(\theta)}, \\ z &= \sqrt{J_z \beta_z(\theta)} \cos(\phi_z), \quad I_{x,z} = \frac{pJ_{x,z}}{2}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Из уравнений (7.4) находим, что при равенстве β -функций пучков на участке столкновения добавка в гамильтониан из-за эффектов встречи зависит от значения β -функции в месте встречи только через модуляцию фаз бетатронных колебаний. Это общее свойство столкновений частицы со сгустком, имеющим круглое поперечное сечение.

В первом приближении метода усреднения значения сдвигов частот, например вертикальных колебаний для синхронных ча-

стиц, следующим образом зависят от амплитуд:

$$\Delta\nu_z(J_z, J_x) = \frac{\xi}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi_x d\psi_z \cos^2(\psi_x)}{1 + \frac{J_x \cos^2(\psi_x) + J_z \cos^2(\psi_z)}{\epsilon}}, \quad (7.6)$$

$$= \xi \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1 + J_x/\epsilon}}, & J_z \ll \epsilon, \\ \frac{2}{1 + J_z/\epsilon + \sqrt{1 + J_z/\epsilon}}, & J_x \ll \epsilon. \end{cases}$$

Из этих выражений следует, что в результате возмущения рабочая точка сгустка в плоскости частот бетатронных колебаний превращается в пятно (в зарубежной литературе используется термин footprint). Поскольку частоты колебаний распределены в диапазоне

$$0 \leq \nu - \nu_0 \leq \xi,$$

такое пятно имеет четко очерченные границы (рис. 20), которые определяются уравнениями

$$\begin{aligned} \nu_x = \nu_0 + \Delta\nu_x(J_x, 0), \quad \nu_z = \nu_0 + \Delta\nu_z(0, J_z), \\ \nu_x = \nu_0 + \Delta\nu_x(0, J_z), \quad \nu_z = \nu_0 + \Delta\nu_z(J_x, 0). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Другим важным следствием нелинейности полей встречных пучков является возможность возбуждения нелинейных резонан-

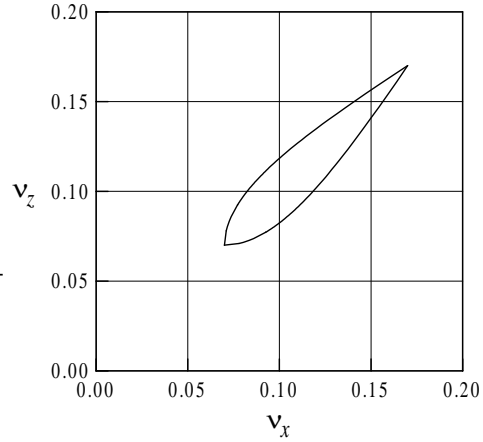


Рис. 20. Границы распределения частот бетатронных колебаний за счет взаимодействия встречных пучков. Поперечное сечение пучков круглое, $\xi = 0.1$

сов. Для бетатронных колебаний синхронных частиц общее условие резонанса имеет вид

$$m_x \nu_x + m_z \nu_z = n, \quad (7.8)$$

где m_x , m_z и n - целые числа. Поскольку частоты частиц в сгустке зависят от амплитуд, работают лишь те резонансы, которые попадают внутрь пятна. При этом уравнение резонанса преобразует прямые линии в плоскости частот бетатронных колебаний в некоторые кривые в плоскости амплитуд таких колебаний. Например, условие одномерного резонанса $\nu_z = n/m$ превращается в уравнение линии в плоскости (J_x, J_z) :

$$\Delta \nu_z(J_x, J_z) = \frac{n}{m} - \nu_{z0} \geq 0. \quad (7.9)$$

Для противоположно заряженных частиц сдвиги частот $\Delta \nu$ положительны. Это означает, что условие резонанса (7.9) выполняется для частот $\nu_{z0} \leq n/m$.

В первом приближении метода усреднения мощности этих резонансов равны величинам гармоник U по фазам колебаний и азимуту

$$U = \sum_{m,n} U_{m,n} e^{im\psi - in\theta}. \quad (7.10)$$

При соосном столкновении сгустков U является четной функцией поперечных координат. В таком случае ряд в уравнении (7.10) содержит лишь четные гармоники фаз бетатронных колебаний ($m = 2k$). Разведение сгустков в месте встречи добавляет в U нечетные гармоники расширяя число возможных резонансов. Уравнения первого приближения получаются отбором в сумме (7.10) медленных слагаемых. При заданных m и n и малой расстройке от резонанса $\delta_{m,n} = (n/m) - \nu_{z0}$ в формуле (7.10) помимо $U_{m,n}$ могут оказаться медленными кратные гармоники $U_{lm,lk}$, где l - целые числа. Это обстоятельство, вообще говоря, следует учитывать при вычислении мощностей резонансов встречных пучков.

Для одномерного резонанса вертикальных колебаний ($J_x = 0$) и для лобовых столкновений сгустков имеем $U_{2k+1,n} = 0$, а

$$|U_{2k,n}| = \frac{2\xi\epsilon}{k} \left[\frac{J_z/\epsilon}{2 + J_z/\epsilon + 2\sqrt{1 + J_z/\epsilon}} \right]^k. \quad (7.11)$$

Из этого выражения видно, что в центральной области пучка ($J_z \leq \epsilon$) мощности резонансов экспоненциально быстро убывают при увеличении k . Наоборот, в периферической области ($J_z \gg m^2\epsilon$) это убывание становится лишь гиперболическим:

$$|U_{2k,n}| \simeq \frac{2\xi\epsilon}{k} \exp\left(-2k\sqrt{\frac{\epsilon}{J_z}} \left[1 - \frac{\epsilon}{6J_z}\right]\right), \quad J_z \gg \epsilon.$$

Поэтому если частота ν_0 не приближена к резонансам $\nu_0 = 1/2$, $\nu_0 = 1/3$ или $\nu_0 = 1/4$, то наиболее сильные возмущения испытывают колебания частиц, находящиеся в хвостах распределений по амплитудам колебаний. Это также указывает на предпочтительность приближения частот бетатронных колебаний сверху к целому или параметрическому резонансам, так как при этом повышается порядок младшего «работающего» резонанса.

Вблизи изолированного резонанса $\nu_z = n/m$ после перехода к медленным переменным

$$J_z, \quad w = \psi_z - \frac{n}{m}\theta + \arg(U_{m,n})$$

геометрия фазовой плоскости описывается гамильтонианом

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathcal{H}_0 + 2|U_{m,n}| \cos(mw), \\ \mathcal{H}_0 &= \delta_{mn}J_z + 4\xi\epsilon \ln \left[1 + \sqrt{1 + \frac{J_z}{\epsilon}} \right]. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Поскольку на больших амплитудах ($J_z \gg m^2\epsilon$) поведение $\mathcal{H} \sim \delta_{mn}J_z$ не зависит от фазовой переменной w , колебания устойчивы по J_z даже для нулевых отстроек от резонанса ($\delta_{mn} = 0$). Так как

\mathcal{H} является интегралом движения, уравнения фазовых траекторий имеют вид $\mathcal{H}(J_z, w) = C$. Среди фазовых траекторий всегда есть финитные и инфинитные по фазовой переменной w . Соответствующие уравнения движения

$$\begin{aligned} J'_z &= 2m|U_{m,n}| \sin(mw), \\ w' &= \delta_{mn} + \Delta\nu_z(J_z) + 2\frac{\partial|U_{m,n}|}{\partial J_z} \cos(mw) \end{aligned} \quad (7.13)$$

помимо прямого вычисления фазовых траекторий и законов движения позволяют найти точки равновесия:

$$\begin{aligned} J'_z = 0 &\rightarrow mw_s^{(k)} = \pi k, \quad k = 0, 1, \dots, 2m - 1, \\ w' = 0 &= \delta_{mn} + \Delta\nu(J_{zs}) + 2\frac{d|U_{m,n}|}{dJ_z} \cos(mw_s^{(k)}). \end{aligned} \quad (7.14)$$

Точки $w_s^{(k)}$ через одну соответствуют точкам устойчивого и неустойчивого равновесия. Точки устойчивого равновесия определяют центры сепаратрис, а точки неустойчивого равновесия – их седловые точки. Для резонанса $\nu_z = n/m$ всего имеется m сепаратрис. Поскольку набег фазы равновесной частицы за оборот равен $\frac{2\pi n}{m}$, точки устойчивого равновесия определяют стационарные орбиты, замыкающиеся через m оборотов. Частицы, попадающие внутрь сепаратрисы, совершают в ней устойчивые колебания, что приводит к уменьшению плотности ядра сгустка. Соответствующее уменьшение светимости тем больше чем дальше сепаратриса от центра сгустка

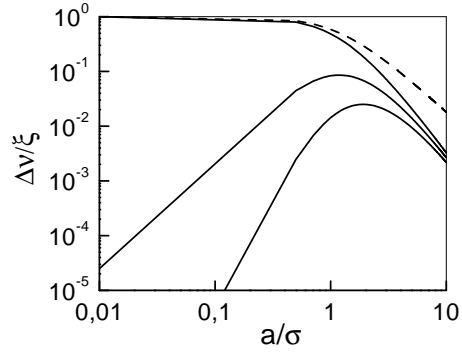


Рис. 21. Вклады гармоник в мгновенный сдвиг частоты. Пунктирная линия дает вклад нерезонансной гармоники; сплошные сверху вниз $k = 1, 2, 3$

и чем больше накоплено в ней частиц. Положения центров сепаратрис определяется условием резонанса (7.14) [$w'(J_{zs}, w_s) = 0$]. Как видно из рис. 21, за исключением случая параметрического резонанса, основной вклад в мгновенный сдвиг частоты дает нерезонансное слагаемое ($\Delta\nu_z(J_z)$ из уравнения (7.6)).

Значение J_{zs} определяется особенно простым выражением в непосредственной близости резонанса ($\xi \gg |\delta_{mn}|$), когда

$$J_{zs} \simeq \epsilon \frac{2\xi}{|\delta_{mn}|} \gg \epsilon. \quad (7.15)$$

Размеры сепаратрис можно вычислить, например, построением гамильтонианов $\mathcal{H}_{\pm} = \mathcal{H}_0 \pm 2|U_{m,n}|$.

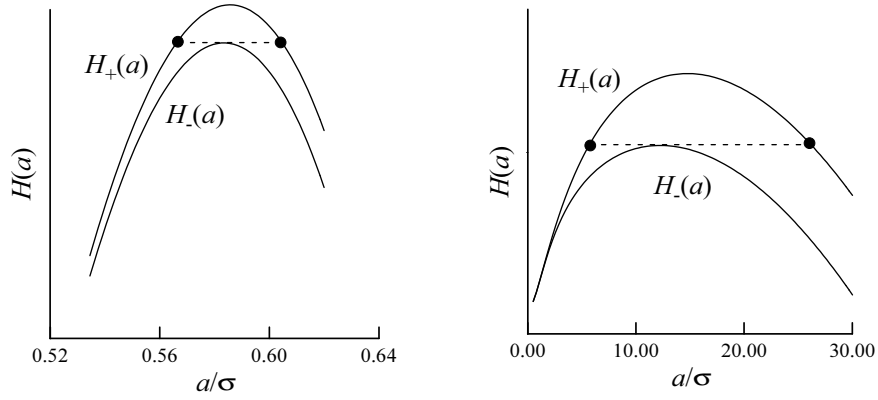


Рис. 22. Зависимости гамильтонианов \mathcal{H}_{\pm} от амплитуд колебаний ($\sqrt{J_z/\epsilon}$). Резонанс $\nu = n/8$ ($k = 4$); левый рисунок $\delta = -0.8\xi$, правый $\delta = -0.01\xi$. Жирные точки отмечают границы сепаратрис

Как можно видеть из рис. 22, положение сепаратрисы определяется уравнением

$$\mathcal{H}(J_z, w) = (\mathcal{H}_-)_{\max}.$$

Сепаратрисы попадают в область малых амплитуд колебаний вблизи нижней границы резонансной полосы ($\delta_{mn} \simeq -\xi$; см. рис. 22). Размеры таких сепаратрис и глубина биений амплитуд

при этом невелика. Наоборот, вблизи верхней границы ($|\delta_{mn}| \ll \xi$) сепаратрисы образуются вне пучка, а размеры их велики. Опасность образования таких сепаратрис заключается в том, что они могут заселяться за счет рассеяния частиц и при сравнимости размера сепаратрисы с динамической апертурой машины ограничивать время жизни пучка.

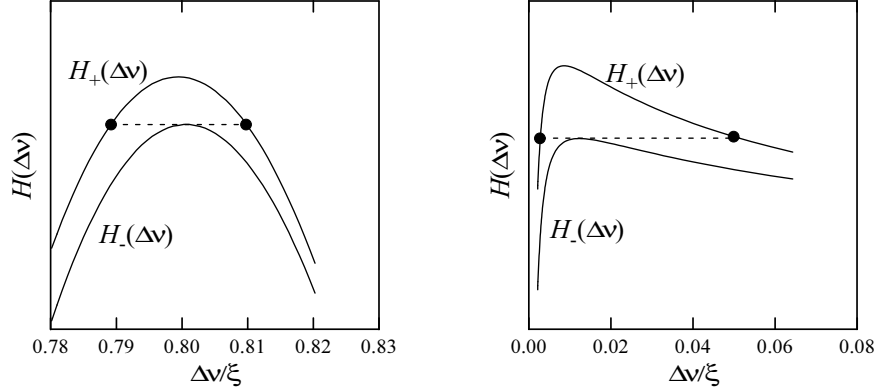


Рис. 23. К оценке размера сепаратрисы в пространстве частот колебаний. Кривые дают зависимости гамильтонианов \mathcal{H}_{\pm} от сдвига частоты $\Delta\nu(J_z)$. Резонанс $\nu = n/8$ ($k = 4$); левый рисунок $\delta = -0.8\xi$, правый – $\delta = -0.01\xi$. Жирные точки отмечают границы сепаратрисы

Возможность описания колебаний захваченных частиц в приближении изолированного резонанса, по крайней мере, предполагает, что размеры сепаратрис в пространстве частот малы по сравнению с расстояниями между резонансами. Поскольку в условие резонанса (7.9) фактически входит лишь дробная часть ν , минимальное расстояние между соседними резонансами оценивается как

$$\delta_{m,n} - \delta_{m+1,n} \simeq \frac{\nu}{m}.$$

Размер сепаратрисы оценивается либо вычислением частоты ма-

лых фазовых колебаний

$$\nu_c^2 = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial J_z^2} \right)_s \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial w^2} \right)_s = -2m^2 |U_{m,n}| \left(\frac{\partial \Delta \nu}{\partial J_z} \right)_s,$$

либо пересчетом размера сепаратрисы из пространства амплитуд колебаний. Как видно из рис. 23, для резонансов высокого порядка эта ширина, вообще говоря, невелика.

7.2. Действие трения на резонансы встречных пучков

Действие резонансов высокого порядка может подавляться охлаждением пучка. Рассмотрим случай электрон-позитронных накопителей, когда такое охлаждение обеспечивается за счет потерь энергии частиц на синхротронное излучение. С учетом трения уравнения движения (7.13) заменяются на

$$\begin{aligned} J_z' &= -\Lambda J_z + 2m |U_{m,n}| \sin(mw), \\ w' &= \delta_{mn} + \Delta \nu_z(J_z) + 2 \frac{\partial |U_{m,n}|}{\partial J_z} \cos(mw), \end{aligned} \quad (7.16)$$

где $\Lambda = \lambda/\omega_0$ - декремент затухания колебаний, выраженный в единицах частоты обращения. Положение стационарных точек $w_s^{(k)}$ определяется уравнением

$$\sin(mw_s) = \frac{\Lambda J_{zs}}{2m |U_{m,n}(J_{zs})|}. \quad (7.17)$$

Стационарных точек нет, если $|\sin(mw_s)| > 1$. В таком случае трение подавляет резонанс. Поскольку мощности резонансов ($|mU_{m,n}|$) убывают при увеличении m , в электрон-позитронных

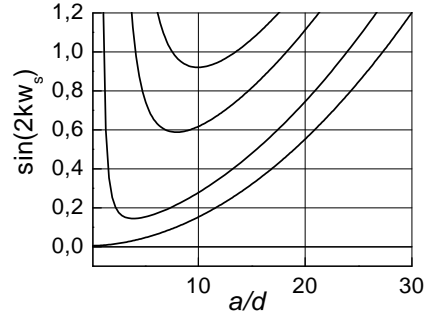


Рис. 24. Зависимость $\sin w_s$ от амплитуд колебаний; $\Lambda = 0.01\xi$, сверху вниз $k = 10, 8, 4, 1$

машинах резонансы высокого порядка не наблюдаются (рис. 24). Наоборот, в установках с адронными встречными пучками без охлаждения могут наблюдаться резонансы эффектов встречи очень высокого порядка. Предельные значения ξ в существующих e^+e^- и адронных коллайдерах отличаются больше чем на порядок.

8. ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОД УГЛОМ

Помимо схем с лобовыми столкновениями сгустков, уже давно обсуждаются схемы, где сгустки сталкиваются по некоторым углом. В настоящее время интерес к таким установкам связывается с упрощением разведения сгустков в паразитных местах встречи, появляющихся при увеличении чисел сгустков в пучках.

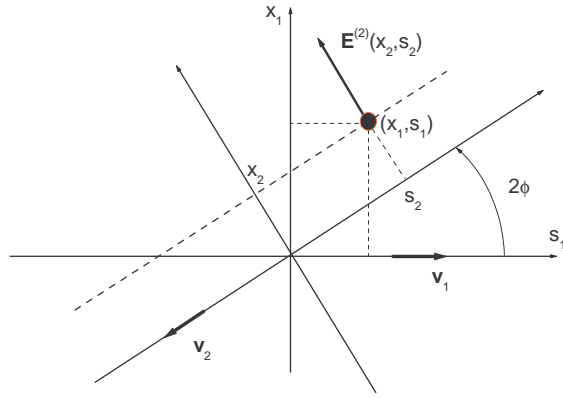


Рис. 25. К задаче о эффектах встречи при пересечении под углом. Угол пересечения 2ϕ .

Для определенности рассмотрим случай, когда пересечение осуществляется в горизонтальной плоскости. Примем, что угол пересечения равен 2ϕ (рис. 25). Поскольку продольные размеры сгустков в такой установке проектируются на радиальное направление, светимость будет определяться не естественным радиальным размером сгустка, а его эффективным радиальным размером

$$\sigma_x \rightarrow \sigma_{eff} = \sqrt{\sigma_x^2 + \phi^2 \sigma_s^2}. \quad (8.1)$$

При этом

$$L = f_b \frac{N_1 N_2}{4\pi\sigma_z\sigma_{eff}} = \frac{L_0}{\sqrt{1 + \phi^2/\phi_{cr}^2}}, \quad (8.2)$$

где $\phi_{cr} = \sigma_x/\sigma_s \ll 1$ – так называемый критический угол пересечения. Таким образом, угол пересечения не может быть очень большим.

8.1. Синхробетатронные резонансы

Поля релятивистского встречного сгустка направлены поперек его средней скорости. Поэтому при пересечении под углом возмущающая сила имеет проекции как на направления поперечных координат возмущаемой частицы, так и на направление ее продольной координаты (см. рис. 25). Таким образом, при пересечении сгустков под углом поля встречного сгустка связывают бетатронные и синхротронные колебания частицы. Для вычисления соответствующих коэффициентов связи колебаний заметим, что координаты частицы пучка (1) – x_1 и s_1 определяют проекции расстояний частицы до центра встречного сгустка (2) – x_2 and s_2 посредством преобразования вращения

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 \cos(2\phi) - s_1 \sin(2\phi), \\ s_2 &= x_1 \sin(2\phi) + s_1 \cos(2\phi). \end{aligned} \quad (8.3)$$

Для простоты примем, что длины сталкивающихся пучков малы по сравнению с значением β -функции в месте встречи ($\sigma_s \ll \beta_0$). При лобовом столкновении возмущение описывалось бы выражением

$$F_x^{(2)} = 2\delta_T(s_2 + ct)F(x_2). \quad (8.4)$$

При столкновении под углом с учетом того, что $s_1 = ct + y_1$, где y_1 описывает синхротронные колебания частицы (1), столкновение происходит в момент времени:

$$ct_0 = -\frac{y_1 \cos(2\phi) + x_1 \sin(2\phi)}{1 + \cos(2\phi)}. \quad (8.5)$$

Значение поперечной координаты x_2 в этот момент равно

$$\begin{aligned}
x_2 &= x_1 \cos(2\phi) - s_1 \sin(2\phi) \\
&= x_1 \cos(2\phi) - \sin(2\phi) \left[-\frac{y_1 \cos(2\phi) + x_1 \sin(2\phi)}{1 + \cos(2\phi)} + y_1 \right] \\
&= x_1 - y_1 \tan(\phi). \tag{8.6}
\end{aligned}$$

С учетом выражения (6.7) находим, что сила, действующая на частицы сгустка (1), записывается в виде

$$\mathbf{F} = \left(1 - \frac{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2}{c^2}\right) e_1 \mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t) + \frac{e_1}{c^2} \mathbf{v}_2 (\mathbf{v}_1 \mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t)). \tag{8.7}$$

Проектируя \mathbf{F} на радиальное направление в пучке (1) и учитывая, что (рис. 25) $\mathbf{v}_2 = c(-\sin 2\phi, 0, -\cos 2\phi)$, а

$$1 - \frac{(\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2)}{c^2} = 1 + \cos 2\phi,$$

получим

$$\begin{aligned}
F_x &= e_1 \left((1 + \cos 2\phi) E^{(2)} \cos 2\phi - \sin^2 2\phi E^{(2)} \right) \\
&= (1 + \cos 2\phi) pc \delta_T(s_2 + ct) F(x_2), \tag{8.8}
\end{aligned}$$

где мы ввели обозначение

$$e_1 E^{(2)}(x_2, s_2, t) = pc \delta_T(s_2 + ct) F(x_2). \tag{8.9}$$

Подставив эти выражения в уравнения движения частиц сгустка (1), находим ($x'_1 = dx_1/ds_1$)

$$\begin{aligned}
\frac{dx'_1}{ds_1} &= \delta_T(s_1 \cos(2\phi) + x_1 \sin(2\phi) + ct_0) \\
&\quad \times (1 + \cos 2\phi) F(x_1 - y_1 \tan(\phi)) \\
&= \delta_T \left[s_1 - \frac{y_1 - x_1 \sin 2\phi}{1 + \cos 2\phi} \right] F(x_1 - y_1 \tan(\phi)). \tag{8.10}
\end{aligned}$$

Согласно этому уравнению, величина $F(x)$ определяет величину удара, который испытывает частица пройдя место встречи:

$$\delta(x'_1) = F(x_1 - y_1 \tan(\phi)).$$

Согласно уравнению (8.5) при пересечении под углом помимо модуляции синхротронными колебаниями радиального положения частицы в пучке (2) поперечные колебания частицы сгустка (1) модулируют и положение места встречи. Поскольку ширины F зависят от величин β -функций, в протяженных пучках это может приводить к дополнительным модуляциям возмущений за счет изменений β -функции:

$$\beta(s_2) = \beta_0 + \frac{(x_1 \sin 2\phi + s_1 \cos 2\phi)^2}{\beta_0}.$$

Здесь β_0 – значение β -функции в месте встречи равновесной частицы. Величины таких модуляций пренебрежимо малы лишь при выполнении условия $\beta_0 \gg \max\{\sigma_s, \sigma_x/\phi\}$.

Поскольку энергия частицы изменяется лишь электрическим полем пучка, а $E_{x_1} = -\sin 2\phi E^{(2)}$ (рис. 25), пишем ($\delta_1 = \Delta p_1/p$)

$$\begin{aligned} \frac{d\delta_1}{ds_1} &= -\sin 2\phi \delta(s_2 + ct) F(x_2) \\ &= -\tan \phi \delta_T \left(s_1 - \frac{y_1 - x_1 \sin 2\phi}{1 + \cos 2\phi} \right) F(x_1 - z_1 \tan \phi) \end{aligned} \quad (8.11)$$

Поскольку $F(x_2) = -\partial U/\partial x_2$, пишем

$$\begin{aligned} \frac{dJ_x}{ds} &= 2\delta_T \left[s_1 - \frac{y_1 - x_1 \sin 2\phi}{1 + \cos 2\phi} \right] F(x_1 - y_1 \tan(\phi)) \frac{\partial x_1}{\partial \psi_x} \\ &= -2\delta_T(s_1) \frac{\partial U[x_1 - y_1 \tan(\phi)]}{\partial \psi_x}, \end{aligned}$$

а также ($I_s = (p\nu_s a_s^2)/(2R_0\eta) = pJ_s/2$)

$$\begin{aligned} \frac{dJ_s}{ds_1} &= 2 \frac{d\delta_1}{ds_1} \frac{\partial y_1}{\partial \psi_s} \\ &= -2 \tan \phi \delta_T \left(s_1 - \frac{y_1 - x_1 \sin 2\phi}{1 + \cos 2\phi} \right) F(x_1 - y_1 \tan \phi) \frac{\partial y_1}{\partial \psi_s}. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial U(x_1 - y_1 \tan \phi)}{\partial x_1} = -\frac{1}{\tan \phi} \frac{\partial U(x_1 - y_1 \tan \phi)}{\partial y_1}, \quad (8.12)$$

пишем

$$\begin{aligned} \frac{dJ_s}{ds_1} &= 2\delta_T \left(s_1 - \frac{y_1 - x_1 \sin 2\phi}{1 + \cos 2\phi} \right) \left(\tan \phi \frac{\partial U}{\partial x_1} \frac{\partial y_1}{\partial \psi_s} \right) \\ &= 2\delta_T \left(s_1 - \frac{y_1 - x_1 \sin 2\phi}{1 + \cos 2\phi} \right) \left(-\frac{\partial U(x_1 - y_1 \tan \phi)}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial \psi_s} \right) \\ &= -2\delta_T \left(s_1 - \frac{y_1 - x_1 \sin 2\phi}{1 + \cos 2\phi} \right) \frac{\partial U(x_1 - y_1 \tan \phi)}{\partial \psi_s} \end{aligned}$$

Из этих уравнений следует, что, если принять в качестве новой независимой переменной (времени) выражение

$$R_0\theta = s_1 - \frac{y_1 - x_1 \sin 2\phi}{1 + \cos 2\phi},$$

то возмущения частиц при пересечении сгустков под углом описываются Гамильтонианом

$$h = \nu_x J_x + \nu_s J_s + 2\delta_T(\theta)U[x_1 - y_1 \tan(\phi)]. \quad (8.13)$$

Оценим инкременты раскачки колебаний в простейшем случае, когда функция F линейно зависит от x_2 :

$$F(x_2) = -\frac{4\pi\xi}{\beta_0}x_2, \quad U = \frac{2\pi\xi x_2^2}{\beta_0}. \quad (8.14)$$

При этом

$$U = \frac{2\pi\xi}{\beta_0} \delta_T(\theta) (x_1 - y_1 \tan \phi)^2 = X + Y + U_c,$$

а связь синхротронных и бетатронных колебаний частицы описывается слагаемым

$$\begin{aligned}
U_c &= -\frac{4\pi\xi}{\beta_0} \delta_T(\theta) x_1 y_1 \tan(\phi) \\
&= -2\pi\xi \tan(\phi) \delta_T(\theta) \sqrt{J_x J_s \frac{R_0 \eta}{\nu_s \beta_0}} [\cos(\psi_x + \psi_s) + \cos(\psi_x - \psi_s)].
\end{aligned} \tag{8.15}$$

В консервативной системе в суммовом резонансе сохраняется величина $J_x - J_s = C$. В случае синхробетатронных резонансов обычное условие суммового резонанса $\nu_x + \nu_s = k$ (k – целое) выполняется при энергиях частиц меньших критической энергии накопителя ($\gamma < \gamma_{tr}$). В обратном случае ($\gamma > \gamma_{tr}$) суммовым резонансам соответствует условие $\nu_x - \nu_s = k$. Ниже для простоты предполагаем, что $\gamma < \gamma_{tr}$. Тогда, после усреднения Гамильтониана (8.15) и выделения медленных переменных, суммовой резонанс описывается следующим слагаемым:

$$U_c = \xi \tan(\phi) \sqrt{J_x J_s \frac{R_0 \eta}{\nu_s \beta_0}} \cos(w), \quad w = \psi_x + \psi_s - n\theta + \pi. \tag{8.16}$$

Наиболее простому случаю соответствует выбор параметров, когда $C = 0$, а частоты находятся в точном суммовом резонансе $\nu_x + \nu_s = k$. С такими параметрами скорости нарастания амплитуд максимальны. Используя дополнительный интеграл движений, пишем

$$h = J \cos(w) \xi \tan(\phi) \sqrt{\frac{R_0 \eta}{\nu_s \beta_0}}$$

или

$$J' = -J \sin(w) \xi \tan(\phi) \sqrt{\frac{R_0 \eta}{\nu_s \beta_0}}, \quad w' = \cos(w) \xi \tan(\phi) \sqrt{\frac{R_0 \eta}{\nu_s \beta_0}}.$$

Решая эти уравнения, получаем $J(w) \propto 1/\cos(w)$ и

$$\int \frac{dw}{\cos(w)} = \ln \left(\frac{1 + \sin w}{\cos w} \right) = u = \theta \xi \tan(\phi) \sqrt{\frac{R_0 \eta}{\nu_s \beta_0}}.$$

Используя последнее уравнение, пишем

$$\cos w = \frac{2e^u}{1 + e^{2u}} \quad (8.17)$$

или

$$J(\theta) \propto \exp \left(\theta \xi \tan(\phi) \sqrt{\frac{R_0 \eta}{\nu_s \beta_0}} \right). \quad (8.18)$$

Таким образом, в суммовом синхробетатронном резонансе амплитуды бетатронных и синхротронных колебаний частицы нарастают с инкрементами

$$\frac{1}{\tau} = \omega_0 \xi \tan(\phi) \sqrt{\frac{R_0 \eta}{\nu_s \beta_0}}. \quad (8.19)$$

Впервые ограничения за счет синхробетатронных резонансов при пересечении под углом наблюдались на установке DORIS в DESY (ФРГ) [7]. В этой установке пересечение осуществлялось в вертикальной плоскости. Поскольку в e^+e^- машинах вертикальный размер сгустка обычно существенно меньше радиального, критический угол был особенно мал.

В настоящее время применение схем с пересечением под углом в горизонтальной плоскости широко обсуждается для увеличения светимости электрон-позитронных фабрик. В таком случае значения критического угла пересечений существенно увеличивается, а влияние обсуждавшихся резонансов связи эффективно уменьшается. В частности, такая схема пересечений успешно работает на В-фабрике КЕКВ в Национальном ускорительном центре КЕК, г. Цукуба, Япония. На этой фабрике уже достигнуто рекордное в мире значение светимости, превышающее 2×10^{34} [1/см²с].

8.2. Краб-кроссинг

Уменьшение светимости установки при пересечениях сгустков под углом устраняется в схеме столкновений с краб-пересечением (буквальный перевод оригинального термина *crab-crossing*). В такой схеме непосредственно перед сведением пучки поворачиваются в плоскости столкновения так, чтобы столкновение становилось лобовым (рис. 26). Если угол пересечения равен 2ϕ , то это достигается преобразованием координат частицы в месте встречи согласно

$$x_1 = x_b + ay, \quad a = \tan(\phi).$$

Если, однако, остальные координаты остаются неизменными, то такое преобразование не является симплектическим и потому не может быть осуществлено внешними полями. Простейшим симплектическим является краб-преобразование, при котором одновременно с поперечными координатами изменяется энергия частицы:

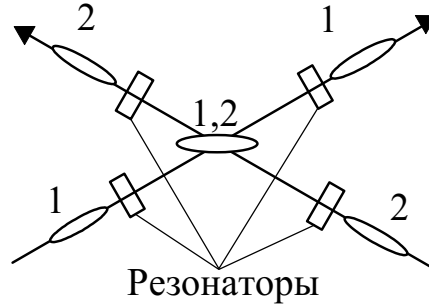


Рис. 26. Схема столкновения пучков при краб-пересечении

$$\begin{aligned} x_1 &= x_b + \tan(\phi)y, \\ \delta_1 &= \delta - \tan(\phi)x'_b. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Действительно, матрица преобразования (8.20) есть

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \tan \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\tan \phi & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Прямым перемножением находим

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\tan\phi \\ \tan\phi & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} U \begin{bmatrix} 1 & 0 & \tan\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\tan\phi & 0 & 1 \end{bmatrix} = U,$$

где

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Оказывается, что, помимо прочего, такое краб-преобразование может приводить также к сокращению синхробетатронных модуляций резонансов коротких встречных пучков [8]. Действительно, если x'_- и δ_- – значения относительных импульсов частицы до столкновения, а x'_+ и δ_+ – после столкновения сгустков, то последовательными преобразованиями

$$x'_+ = x'_- + F[x_b + ay_1 - y_1 \tan(\phi)],$$

$$\delta_+ = \delta_- - ax'_- - \tan(\phi)F[x_b]$$

и

$$(x_b)_f = x_b - ay_1,$$

$$\delta_f = \delta_- - ax'_- - \tan(\phi)F[x_b] + a[x'_- + F(x_b)] = \delta_-$$

убеждаемся в том, что такое прохождение места встречи не сопровождается взаимными модуляциями бетатронных и синхротронных колебаний, если $a = \tan\phi$.

В реальных случаях краб-преобразование может производиться, например, коррекцией поперечных импульсов частиц поперечными ВЧ-полями в точке, отстоящей от места встречи на расстоянии соответствующим набегу фазы бетатронных колебаний $\Delta\mu = \pi/2$ (рис. 27). Поля в резонаторе фазируются так, чтобы

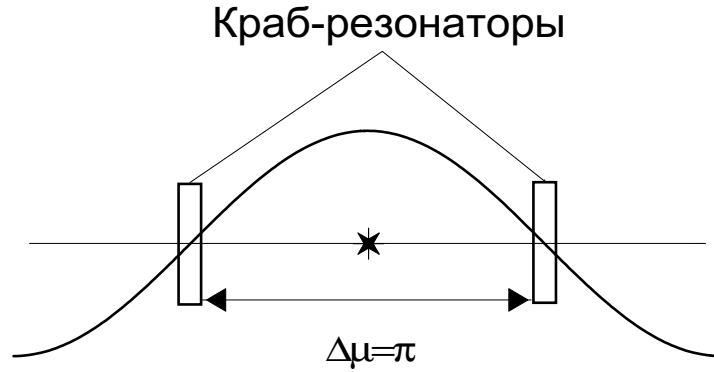


Рис. 27. Схема краб-преобразования с резонаторами

поперечный импульс синхронной частицы не менялся, а несинхронных изменялся бы согласно

$$\begin{aligned} x'_f &= x'_{in} + \tan(\phi)y, \\ \delta_f &= \delta_{in} - \tan(\phi)x_{in}. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Тогда в месте встречи координаты частиц будут распределены согласно формулам (8.20). Обратное преобразование осуществляется вторым краб-резонатором, также отстоящим от места встречи на $\Delta\mu = \pi/2$ (см. рис. 27). Для того чтобы краб-резонаторы сами не возбуждали синхробетатронные резонансы, дисперсионные функции кольца в краб-резонаторах должны иметь нулевые значения. Хроматичность фокусировки на участке преобразования должна быть подавлена.

9. ПРОТЯЖЕННЫЕ СГУСТКИ

9.1. Сдвиги частот малых бетатронных колебаний

В тех случаях, когда длины сталкивающихся сгустков сравнимы с величинами β -функций в месте встречи, возмущение по-

лями встречного сгустка уже нельзя описывать в приближении тонких линз. В этой области параметров существуют обширные интервалы фаз бетатронных колебаний, когда частица пересекает встречный сгусток под углом. С одной стороны, это приводит к уменьшению мощностей резонансов, с другой – к возбуждению синхробетатронных колебаний частиц. Результаты таких возмущений различны для пучков с плоским и круглым поперечными сечениями.

Простейшие эффекты можно проследить на примере вычисления линейных сдвигов частот. Изменение, например, вертикальной компоненты импульса частицы, проходящей сгусток с поперечным сечением $\sigma_x \times \sigma_z$, равно

$$\frac{dp_z}{dt} = -\frac{4N_2e^2}{\sigma_z(\sigma_z + \sigma_x)}\rho(2ct)z. \quad (9.1)$$

Для простоты примем, что искажения набегов фаз бетатронных колебаний полями встречного сгустка на длине пучка (σ_s) малы:

$$D_x = \frac{4\pi\xi_x\sigma_s}{\beta_x} \ll 1, \quad D_z = \frac{4\pi\xi_z\sigma_s}{\beta_z} \ll 1.$$

В первом порядке метода усреднения пишем

$$\begin{aligned} \Delta\nu_z &= -\int_0^\Pi \frac{ds}{2\pi c} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi_z}{2\pi} \frac{\partial z}{\partial I_z} \frac{dp_z}{dt} \\ &= \frac{N_2e^2}{2\pi\rho c} \int_0^\Pi ds \frac{2\beta_z(s)\rho(2s)}{\sigma_z(s)[\sigma_x(s) + \sigma_z(s)]}. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Если $\beta_x(s) = \beta_z(s) = \beta(s)$, то

$$\begin{aligned} \frac{\beta_z(s)}{\sigma_z(s)[\sigma_x(s) + \sigma_z(s)]} &= \frac{\beta(s)}{\beta(s)[\sqrt{\epsilon_z} + \sqrt{\epsilon_x}]\sqrt{\epsilon_z}} \\ &= \frac{1}{[\sqrt{\epsilon_z} + \sqrt{\epsilon_x}]\sqrt{\epsilon_z}}. \end{aligned}$$

Для такой фокусировки пучков соотношение (9.2) переходит в следующее:

$$\Delta\nu_z = \frac{N_2 e^2}{2\pi p c [\sqrt{\epsilon_z} + \sqrt{\epsilon_x}] \sqrt{\epsilon_z}} = \xi_z. \quad (9.3)$$

Если к тому же вертикальный и радиальный эмиттансы сгустка равны ($\epsilon_x = \epsilon_z = \epsilon$), он будет иметь в месте встречи круглое сечение. При этом сдвиги частот вертикальных и радиальных колебаний равны ($\Delta\nu_x = \Delta\nu_z = \Delta\nu$), где

$$\Delta\nu = \xi = \frac{N_2 e^2}{4\pi r c \epsilon}. \quad (9.4)$$

В обоих случаях сдвиги частоты бетатронных колебаний не зависят от длины встречного сгустка. Если бы мы повторили вычисления для частицы, совершающей синхротронные колебания, то также нашли бы, что сдвиги частот, определяемые уравнениями (9.3) и (9.4), не зависят от амплитуд этих колебаний. Таким образом, в случае пучков с круглым поперечным сечением учет длины пучка и синхротронных колебаний частиц не добавляет размерности резонансов в пространстве амплитуд колебаний.

Для пучков с плоским поперечным сечением ($\sigma_x \gg \sigma_z$ и $\beta_x \gg \beta_z$) более типична область параметров, где $\sigma_s \leq \beta_z \ll \beta_x$, и потому

$$\begin{aligned} \Delta\nu_z &\simeq \frac{N_2 e^2 \beta_z}{2\pi p c \sigma_z \sigma_x} 2 \int_{-\infty}^{\infty} ds \rho(2s) \\ &\times \sqrt{1 + \frac{s^2}{\beta_z}} = \xi_z(\sigma_s). \end{aligned} \quad (9.5)$$

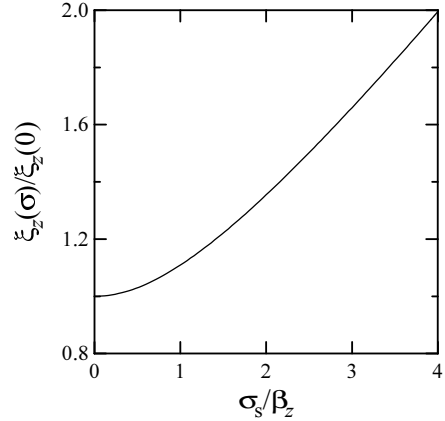


Рис. 28. Зависимость параметра пространственного заряда вертикальных колебаний от длины сгустка

В последнем случае сдвиг частоты вертикальных бетатронных колебаний существенно увеличивается в области $\sigma_s \gg \beta_z$ (рис. 28). Аналогичное увеличение $\Delta\nu_z$ имеет место и при увеличении амплитуды синхротронных колебаний частицы. Таким образом, область частот возможной резонансной раскачки бетатронных (и синхробетатронных) колебаний для плоских пучков является более широкой.

9.2. Мощности резонансов

Для сгустков с идентичными β -функциями и круглым сечением (в действительности требуется лишь $\beta_z(s) = \beta_x(s)$) потенциал взаимодействия с полем встречного сгустка зависит от поперечных координат в комбинациях

$$U = \rho(s + ct)V \left(\frac{x^2 + z^2}{\sigma_{\perp}^2(s)} \right).$$

Записывая $\phi_{x,z} = \psi_{x,z} + \chi_{x,z}(\theta)$ и

$$\frac{x^2 + z^2}{\sigma_{\perp}(s)^2} = \frac{\beta_{+}(\theta)[J_x \cos^2(\phi_x) + J_z \cos^2(\phi_z)]}{\beta_{-}(\theta)\epsilon_{-}},$$

где $\beta_{\pm}(\theta)$ – β -функции встречных сгустков, находим, что при $\beta_{+}(\theta) = \beta_{-}(\theta) = \beta(\theta)$, аргумент V зависит от β -функций лишь через фазы бетатронных колебаний. Поэтому

$$V = \sum_{m_x, m_z} V_{m_{\perp}} \exp[im_x \phi_x + im_z \phi_z] \quad (9.6)$$

и соответственно вблизи резонанса ($m_x \nu_x + m_z \nu_z + m_s \nu_s \simeq n$) функция $U_{m,n}$ факторизуется:

$$U_{m,n} = V_{m_{\perp}}(J_x, J_z) Y_{q, m_s}(\varphi, \sigma_s, \beta). \quad (9.7)$$

Здесь $\varphi = a_s/R_0$ – безразмерная амплитуда синхротронных колебаний, $2q = m_x + m_z$,

$$\mu(\theta) = \int_0^{\theta} \frac{d\theta' R_0}{\beta(\theta')},$$

а

$$Y_{q,m_s}(\varphi, \zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{2\pi} [\rho(2\theta + \varphi \cos \psi_s)]_{m_s} \frac{(\beta + iR_0\theta)^{2q}}{(\beta^2 + (R_0\theta)^2)^q}. \quad (9.8)$$

В последнем выражении учтено, что при симметричной фокусировке сталкивающихся пучков на участке вблизи места встречи $\mu(\theta) = \arctan(R_0\theta/\beta)$. Как видно из уравнения (9.8), при любых

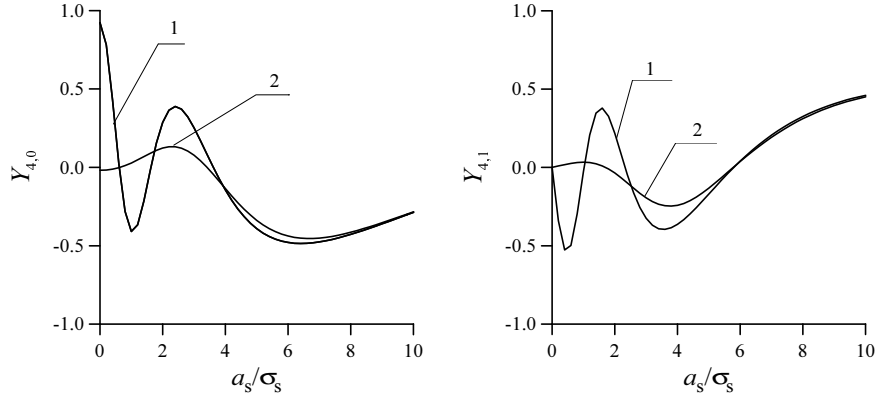


Рис. 29. Зависимости мощностей бетатронного ($\nu_b = 1/4$; левый рисунок) и первых синхробетатронных ($8\nu_b \pm \nu_s = 2k$; правый рисунок) резонансов от амплитуды синхротронных колебаний; 1: $\zeta = 0.1$, 2: $\zeta = 1$

значениях аргументов выполняется условие $|Y_{q,m_s}| \leq 1$. Поэтому мощности резонансов из-за эффектов встречи протяженных пучков с круглым сечением не превышает мощностей резонансов коротких пучков. Более того, изучение зависимостей Y от амплитуд синхротронных колебаний (рис. 29) показывает, что в области $\sigma_s \simeq \beta$ мощности бетатронных и синхробетатронных резонансов встречных пучков существенно подавлены для частиц с небольшими амплитудами синхротронных колебаний ($a_s \leq \sigma_s$). Для частиц в хвостах продольного распределения мощности резонансов длинных и коротких сгустков практически совпадают. Подавление

ние резонансов при столкновениях протяженных пучков получило названия эффекта усреднения [9].

Аналогичное подавление резонансов вертикальных колебаний центральных частиц в области $\sigma_s \simeq \beta_z$ имеет место и для плоских пучков. Однако, в отличие от случая пучков круглого сечения, мощности резонансов в таких пучках растут с увеличением амплитуд синхротронных колебаний частиц. Поскольку обычно значения β -функции радиальных бетатронных колебаний в районе места встречи существенно превышает длину пучка, мощности резонансов радиальных колебаний, обусловленных полем встречного сгустка, будут подавляться эффектом усреднения лишь для резонансов очень высоких порядков.

10. ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ ЗАРЯД

Сходный, хотя и отличный от эффектов встречи, круг явлений может ограничивать достижимые плотности пучков при малых энергиях частиц. Он связан с кулоновским отталкиванием одноименно заряженных частиц и по принятой терминологии называется эффектами пространственного заряда пучка. Обычно такие ограничения обсуждаются в связи с пучками тяжелых частиц (ионов), энергии частиц в которых далеки от ультрарелятивистских областей. Из всего многообразия таких явлений мы обсудим лишь некоторые, ограничивающие возможности получения плотных пучков в циклических машинах за счет неустойчивости поперечных колебаний частиц.

Как и в случае эффектов встречи, мы предполагаем, что основные ограничения связаны с кулоновским взаимодействием частиц. Оно описывается силой

$$F_\alpha = -\frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial U}{\partial r_\alpha}, \quad \alpha = x, z, s. \quad (10.1)$$

Функция U удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) U = -4\pi N e^2 \varrho(x, z) \rho(s - vt) \quad (10.2)$$

с соответствующими граничными условиями на поверхности вакуумной камеры. Здесь $\rho(s)$ – линейная плотность частиц в пучке. Если l_{\perp} – характерный поперечный размер вакуумной камеры, а l_s – характерный масштаб изменения поля пучка вдоль замкнутой орбиты (например, длина пучка), то производные в уравнении (10.2) по порядку величины оцениваются отношениями

$$\frac{\partial U}{\partial r_{\perp}} \sim \frac{U}{l_{\perp}}, \quad \frac{\partial U}{\partial s} \sim \frac{U}{l_s}.$$

Обычно предполагают, что в типичной области параметров выполнено соотношение $l_{\perp} \ll \gamma l_s$. Тогда при решении уравнения (10.2) можно пренебречь кривизной траектории, а также, где это не бессмысленно, отнести граничные условия на бесконечность. Приняв, что распределение частиц по поперечным координатам гауссово с ширинами σ_x и σ_z , приходим к выражению

$$U(\mathbf{r}) = Ne^2 \rho(Y_s) \int \frac{dk_x dk_z F_z F_x}{\pi(k_x^2 + k_z^2)}, \quad (10.3)$$

где $F_x = \exp(ik_x x - k_x^2 \sigma_x^2 / 2)$, а $F_z = \exp(ik_z z - k_z^2 \sigma_z^2 / 2)$. Входящая в это выражение величина $Y_s = s - vt$ равна мгновенному отклонению данной частицы пучка от положения синхронной частицы. Если $R(s)$ – локальный радиус кривизны орбиты, то

$$\frac{dY_s}{ds} = \frac{1}{\gamma^2} - \frac{x}{R(s)}.$$

Предполагая, что синхротронное отклонение частицы от равновесия (y_s) описывается в адиабатическом приближении, пишем

$$Y_s = y_s + y_b, \quad y_b = \eta \frac{dx_b}{ds} - \frac{d\eta}{ds} x_b. \quad (10.4)$$

Здесь $x = x_b + \eta \delta$, $\delta = \Delta p / p$ – относительное отклонение импульса частицы от равновесного значения, а $\eta(s)$ – дисперсионная функция кольца. Величина y_b описывает модуляцию синхротронной фазы частицы бетатронными колебаниями.

10.1. Кулоновский сдвиг частоты

Основные ограничения интенсивности пучка полями пространственного заряда в циклических машинах связаны с нелинейными зависимостями этих полей от отклонений частицы от замкнутой орбиты. По этой причине эмиттанс пучка и акцептанс кольца могут быть согласованы лишь для какой-то области амплитуд. В первом приближении метода усреднения сдвиг частоты горизонтальных бетатронных колебаний определяется выражением

$$\begin{aligned} \Delta\nu_x &= \frac{2R_0}{pv} \frac{\partial U_{00}}{\partial J_x} = \frac{2R_0}{pv} \frac{\partial}{\partial J_x} \int_0^\Pi \frac{ds}{\Pi} \frac{Ne^2\rho(s-vt)}{\gamma^2} \\ &\times \int \frac{d^2k}{\pi k^2} J_0(k_x a_x) J_0(k_z a_z) \exp\left(-\frac{k_x^2 \sigma_x^2 + k_z^2 \sigma_z^2}{2}\right). \end{aligned} \quad (10.5)$$

Вычислим сначала $\Delta\nu_x$, приняв $I_z = 0$ и $|y_b| \ll \sigma_s$. Используя соотношение

$$\frac{\partial}{\partial J_x} J_0(k_x \sqrt{J_x \beta_x}) = -\frac{k_x}{2} \sqrt{\frac{\beta_x}{J_x}} J_1(k_x \sqrt{J_x \beta_x}),$$

пишем

$$\begin{aligned} \Delta\nu_x(J_x) &= -\frac{R_0}{pv} \frac{Ne^2\rho(y_s)}{\gamma^2} \int_0^\Pi \frac{ds}{\Pi} \sqrt{\frac{\beta_x}{J_x}} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} dk_x k_x J_1(k_x \sqrt{J_x \beta_x}) \exp\left(-\frac{k_x^2 \sigma_x^2}{2}\right) \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_z}{\pi(k_x^2 + k_z^2)} \exp\left(-\frac{k_z^2 \sigma_z^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Подставив в это выражение $\sigma_{x,z}^2 = \epsilon_{x,z} \beta_{x,z}$ и $x = k_x \sqrt{J_x \beta_x}$, получим

$$\begin{aligned} \Delta\nu_x &= -\frac{4R_0 Ne^2}{\pi pv \gamma^2} \frac{\rho(y_s)}{J_x} \int_0^\Pi \frac{ds}{\Pi} \int_0^\infty \frac{du}{(1+u^2)} \\ &\times \int_0^\infty dx J_1(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2J_x} \left[\epsilon_x + u^2 \epsilon_z \frac{\beta_z}{\beta_x}\right]\right). \end{aligned} \quad (10.6)$$

Используя формулы $J_1(x) = -dJ_0(x)dx$,

$$\int_0^\infty dx J_1(x) e^{-ax^2} = 1 - 2a \int_0^\infty dx x J_0(x) e^{-ax^2}$$

и заменяя функцию Бесселя рядом по степеням x , получаем

$$\int_0^\infty dx J_1(x) e^{-ax^2} = 1 - \exp\left(-\frac{1}{4a}\right). \quad (10.7)$$

Подставив это выражение в формулу (10.6), получим

$$\begin{aligned} \Delta\nu_x &= -\frac{2R_0 N e^2 \rho(y_s)}{pv\gamma^2 J_x} \int_0^\Pi \frac{ds}{\Pi} \\ &\times \left[1 - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{du}{(1+u^2)} \exp\left(-\frac{J_x \beta_x}{2[\sigma_x^2 + u^2 \sigma_z^2]}\right) \right]. \end{aligned} \quad (10.8)$$

Входящие в это выражение бетатронные функции, в свою очередь, должны вычисляться с учетом полей пространственного заряда. Соответствующие изменения особенно велики вблизи границ области устойчивости колебаний. Считая, что рабочая точка не приближена к этим границам, мы не будем здесь обсуждать этот вопрос. Формула (10.8) еще больше упрощается для плоских пучков ($\sigma_x \gg \sigma_z$). Положив в формуле (10.8) $\epsilon_z = 0$, найдем

$$\Delta\nu_x = -\Delta\nu_L \frac{\rho(y_s)}{\rho(0)} \frac{[1 - \exp(-J_x/(2\epsilon_x))]}{J_x/(2\epsilon_x)}. \quad (10.9)$$

В этом выражении мы ввели величину

$$\Delta\nu_L = \frac{N e^2 \Pi \rho(0)}{2\pi p v \gamma^2 \epsilon_x}, \quad (10.10)$$

которая равна (с обратным знаком) сдвигу частоты малых бетатронных колебаний синхронной частицы. В отсутствие других возмущений величина $\Delta\nu_L$ помимо сдвигов частот определяет мощности резонансов колебаний частиц, обусловленных полями пространственного заряда. Она играет фундаментальную роль

при описании эффектов пространственного заряда и носит название кулоновского сдвига частоты. Отметим, что при заданной величине эмиттанса пучка значение $\Delta\nu_L$ уменьшается с ростом энергии частиц пропорционально $1/(\gamma^3[v/c]^2)$. По этой причине быстрое ускорение частиц позволяет ослабить ограничения интенсивности пучка, обусловленные влиянием полей его пространственного заряда. Для частиц с малыми амплитудами бетатронных колебаний выражение (10.8) записывается в виде

$$\Delta\nu_x(0) = -\Delta\nu_L \frac{\rho(y_s)}{\rho(0)} \int_0^\Pi ds \frac{\sigma_x(s)}{\Pi \sigma_x(s) + \sigma_z(s)}.$$

Если $\epsilon_x = \epsilon_z$, а фокусировка машины составлена из ФОДО-ячеек, то вдоль орбиты сумма $\beta_x + \beta_z$ примерно постоянна. Поэтому пишут

$$\Delta\nu_x(y_s) = -\Delta\nu_L \frac{\rho(y_s)}{\rho(0)} \frac{\overline{\beta_x(s)}}{[\beta_x(s) + \beta_z(s)]/2}, \quad (10.11)$$

а величину $\Delta\nu_L$ определяют согласно

$$\Delta\nu_L = \frac{Ne^2\Pi\rho(0)}{4\pi p v \gamma^2 \epsilon}. \quad (10.12)$$

Довольно часто в таких формулах вместо среднеквадратичных поперечных размеров пучка подставляют их ширины (d ; считая, например, что плотности пучка в вертикальном и радиальном направлениях постоянны). Тогда, поскольку $d^2 \simeq 2\sigma_\perp^2$, формула (10.12) записывается в виде:

$$\Delta\nu_L = \frac{Ne^2\Pi\rho(0)\overline{\beta_\perp}}{2\pi p v \gamma^2 d^2}. \quad (10.13)$$

Для вычисления следа пучка на рабочей клетке помимо $\Delta\nu_x(J_x, 0)$ требуется вычисление сдвига частоты $\Delta\nu_x(0, J_z)$. Согласно урав-

нению (10.5) такая величина равна

$$\begin{aligned} \Delta\nu_x = & -\frac{2R_0}{\pi p v} \frac{N e^2 \rho(y_s)}{\gamma^2} \int_0^\Pi \frac{ds}{\Pi} \beta_x \int_0^\infty du \frac{u^2}{(1+u^2)} \\ & \times \int_0^\infty dk k J_0(ka_z) \exp\left(-\frac{k^2[u^2\sigma_x^2 + \sigma_z^2]}{2}\right) \end{aligned} \quad (10.14)$$

Как и в случае эффектов встречи, при больших амплитудах вертикальных колебаний $\Delta\nu_x(0, J_z)$ уменьшается пропорционально $1/\sqrt{J_z}$. Машинные резонансы, попадающие в область следа пучка, будут увеличивать амплитуды колебаний частиц. Это может сопровождаться как увеличением размеров пучка, так и уменьшением числа частиц в пучке. Во всяком случае мощности таких резонансов следует подавлять.

Кулоновские сдвиги частот бетатронных колебаний синхронных и несинхронных частиц пучка различны. Это приводит к модуляции сдвигов частот бетатронных колебаний синхротронными колебаниями частиц. В результате становится возможным многократное прохождение частицами резонансов, или возбуждение синхробетатронных резонансов.

10.2. Резонансы за счет полей пространственного заряда

Модуляция размеров пучка при его движении вдоль орбиты может вызывать резонансные возмущения колебаний частиц полями пространственного заряда пучка. Поскольку сдвиги частот бетатронных колебаний частиц за счет полей пространственного заряда отрицательны, положение таких резонансов на рабочей клетке частот отличается от положений машинных резонансов. Так, для одномерных бетатронных колебаний условие резонанса

$$\Delta\nu_\perp(J_x, J_z) = \frac{n}{m} - \nu_\perp$$

выполняется выше линии машинного резонанса n/m . По аналогии с неустойчивостью встречных пучков можно было бы ожидать,

что в машинах с большим пространственным зарядом пучка предпочтительные значения частот бетатронных колебаний частиц будут располагаться непосредственно ниже линий параметрических резонансов кольца. Между тем это не всегда так.

Для упрощения вычислений рассмотрим случай одномерных бетатронных колебаний частиц. Пусть, например, частица колеблется в горизонтальной плоскости. Тогда в первом приближении метода усреднения мощности резонансов из-за полей пространственного заряда определяются гармониками

$$U_{mn}(J_x) = \frac{4R_0}{\pi p v} \frac{Ne^2 \rho(Y_s)}{\gamma^2} \int_0^\Pi \frac{ds}{\Pi} e^{im\phi(s)} \int_0^\infty \frac{du}{1+u^2} \times \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{k} J_m(k) \exp\left(\frac{ik\eta(s)\delta}{\sqrt{J_x\beta_x}} - \frac{k^2[\sigma_x^2 + u^2\sigma_z^2]}{2J_x\beta_x}\right). \quad (10.15)$$

Здесь $\delta = \Delta p/p$. В этом выражении ясно видны две важные особенности резонансов из-за сил пространственного заряда. Во-первых, гармоники U_{mn} отличны от нуля лишь благодаря модуляциям бетатронных функций вдоль орбиты накопителя. Поэтому, например, в машинах с круговыми орбитами поля пространственного заряда не вызывают резонансных возмущений. Вместе с тем более плавная распределенность возмущения вдоль орбиты приводит к более быстрому уменьшению величин резонансных гармоник частоты обращения с увеличением их номеров по сравнению с тем, как это было для эффектов встречи.

Во-вторых, в циклических ускорителях и накопителях заряженных частиц дисперсионная функция кольца во многих областях замкнутой орбиты не равна нулю. По этой причине, поля действующие на несинхронные частицы, не обладают определенной симметрией относительно смены знака x_b . Для таких частиц гармоники U_{mn} отличны от нуля как при четных, так и при нечетных значениях m . Это вдвое расширяет семейство опасных резонансов по сравнению со случаем неустойчивости встречных пучков. Вычислим, например, $U_{1,n}$. Предполагая $\sigma_z = 0$, $|y_b| \ll \sigma_s$ и $|\eta\delta| \ll \sigma_x$,

согласно уравнению (10.15), пишем

$$U_{1,n}(J_x) \simeq \frac{4R_0}{pv} \frac{Ne^2 \rho(y_s)}{\gamma^2 \sqrt{J_x}} i\delta \int_0^\Pi \frac{ds}{\Pi} e^{i\phi(s)} \frac{\eta(s)}{\sqrt{\beta_x}} \\ \times \int_0^\infty dk J_1(k) \exp\left(-\frac{k^2 \epsilon_x}{2J_x}\right).$$

Воспользовавшись формулами (10.7) и (10.9), окончательно получим

$$U_{1,n}(J_x) = -2i\delta \Delta\nu_x(y_s, J_x) \sqrt{\frac{J_x}{\epsilon_x}} \int_0^\Pi \frac{ds}{\Pi} e^{i\phi(s)} \frac{\eta(s)}{\sigma_x(s)}. \quad (10.16)$$

Величины этих гармоник тем больше, чем ближе частоты бетатронных колебаний к целому резонансу и чем больше величина $\Delta\nu_L$.

При проектировании машин ограничения интенсивности пучка его пространственным зарядом обычно учитывается определением некоторого предельного значения $\Delta\nu_L$. При быстром ускорении частиц могут оказаться допустимыми значения $\Delta\nu_L \leq 0.5$. Для накопителей с длительным удержанием пучка предельное значение $\Delta\nu_L$ обычно не превышает 0.1.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Коломенский А.А., Лебедев А.Н. Теория циклических ускорителей. М.: ФМ, 1962.
2. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: ФМ, 1963.
3. Дербенев Я.С. Взаимодействие пучков заряженных частиц: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1968. 107 с.
4. Мишнев С.И. Исследование электромагнитного взаимодействия встречных пучков: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1975. 144 с.
5. K. Hirata. Phys. Rev. 1988. D-37. P. 1307.
6. M. Furman. In Proc. of the 3rd Advanced ICFA Beam Dynamics Workshop On Beam-Beam Effects in Circular Colliders. Novosibirsk, 1989. P. 52.
7. A. Piwinski. IEEE Trans. on Nucl. Sci. 1977. NS-24. P. 1408.
8. K. Oide, K. Yokoya. Phys. Rev. 1989. A-40. P. 315.
9. S. Krishnagopal, R. Siemann. Phys.Rev. 1990. D-41. P. 2312.

Дмитрий Васильевич Пестриков
**НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ В ДИНАМИКЕ
ЦИРКУЛИРУЮЩИХ ПУЧКОВ**
Учебное пособие

Редактор *С. Д. Андреева*

Подписано в печать 18.03.2002. Формат 60×84 1/16.
Офсетная печать. Уч.-изд. л. 5.75. Тираж 50 экз.